

文章编号:1673-5005(2016)01-0069-10

doi:10.3969/j.issn.1673-5005.2016.01.010

# 考虑垂向摩阻的裂缝拟三维延伸模型

赵金洲, 彭 瑀, 李勇明, 刘作磊, 符东宇

(西南石油大学油气藏地质及开发工程国家重点实验室, 四川成都 610500)

**摘要:** 裂缝拟三维延伸模型具有极快的收敛速度、令人满意的计算精度和较强的适应性, 但该类模型中没有考虑垂向摩阻, 计算得到的裂缝高度偏大, 不能模拟存在缝高失控的裂缝三维延伸过程。推导存在垂向摩阻的裂缝宽度解析表达式, 考察裂缝张开位移判据的精度, 认为对于常规水力裂缝没有必要进行小范围屈服修正。在此基础上, 考虑双线性流动模式和压裂液的初滤失, 建立改进的裂缝拟三维延伸模型。实例模拟分析表明: 改进模型精度更高; 当隔层应力差较大时, 下缝高的延伸极其缓慢, 有利于底水油藏压裂; 当隔层应力差极小时, 裂缝高度与长度近似相等, 但由于重力差作用, 上、下缝高仍有明显差异。

**关键词:** 压裂; 裂缝延伸; 拟三维模型; 垂向摩阻; 裂缝张开位移判据

**中图分类号:** TE 357.1      **文献标志码:** A

**引用格式:** 赵金洲, 彭瑀, 李勇明, 等. 考虑垂向摩阻的裂缝拟三维延伸模型[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2016, 40(1): 69-78.

ZHAO Jinzhou, PENG Yu, LI Yongming, et al. A pseudo 3D fracture propagation model with consideration of vertical flow resistance [J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2016, 40(1): 69-78.

## A pseudo 3D fracture propagation model with consideration of vertical flow resistance

ZHAO Jinzhou, PENG Yu, LI Yongming, LIU Zuolei, FU Dongyu

(State Key Laboratory of Oil & Gas Reservoir Geology and Exploitation, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

**Abstract:** Pseudo 3D fracture propagation models can be used to simulate the process of hydraulic fracturing treatment, which have rapid convergence speed, satisfactory computing accuracy and flexible adaptation. However, these models neglected the effect vertical flow resistance, so they are unable to simulate fracture propagations in the formation lack of stress difference between the upper/lower layers, and the predicted fracture heights are larger than the real ones in most cases. In deriving a fracture width expression with vertical flow resistance and analyzing the accuracy of crack opening displacement (COD) criterion, it has realized that the correction with a small scale yielding is unnecessary for hydraulic fracturing. Therefore, an improved pseudo 3D fracture propagation model with vertical flow resistance was established considering a dual linear flow pattern and the loss of fracture fluid. The calculation results of a case study show that the new model is more accurate. In addition, the propagation of lower fracture height is very slow at the condition of a higher stress difference, which is good for fracturing in bottom water reservoirs. While at the condition of an extremely low stress difference, the fracture height is nearly equal to the fracture length, but there are still significant difference between upper and lower fracture heights due to the gravity effect.

**Keywords:** hydraulic fracturing; fracture propagation; pseudo 3D model; vertical flow resistance; crack opening displacement criterion

收稿日期: 2015-04-24

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(51490653); 国家“973”重点基础研究发展计划(2013CB228004)

作者简介: 赵金洲(1962-), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为油气藏压裂酸化理论与应用。E-mail: zhaojz@swpu.edu.cn。

通讯作者: 彭瑀(1988-), 男, 博士研究生, 研究方向为油气藏压裂酸化理论与应用。E-mail: pengyu\_frac@foxmail.com。

裂缝延伸是压裂工艺的核心问题,裂缝的几何尺寸、导流能力和有效缝长直接决定了压后产能和单井经济效益<sup>[1-2]</sup>。20世纪50年代以来,Christianovich、Geertsma、De Klerk 和 Perkins、Kern、Nordgerm 等分别建立并完善了 KGD 和 PKN 模型<sup>[3]</sup>。Palmer<sup>[4-6]</sup>和 Clifton<sup>[7-8]</sup>又引入不同的缝高扩展判据,建立了裂缝拟三维和全三维延伸模型。其中,裂缝拟三维延伸模型以其极快的收敛速度、令人满意的计算精度和较强的适应性而倍受石油工程师青睐。但该模型中没有考虑垂向摩擦阻,许多实例都证实,其计算得到的裂缝高度偏大<sup>[9]</sup>,并且不能模拟隔层应力差不足、存在缝高失控的裂缝三维延伸过程。笔者在 Palmer 模型和 Morales 模型<sup>[10]</sup>的基础上,考虑双线性流动模式、裂缝张开位移(crack opening displacement, COD)扩展判据和压裂液的初滤失,建立改进的裂缝拟三维延伸模型,并对该模型的特点和适应性进行分析。

### 1 模型假设条件

假设条件为:

- (1)产层、盖层和底层是各向同性的线弹性体,并且它们的最小水平主应力梯度恒定。
- (2)黏性流体在裂缝中的流动可以分解成沿缝长方向的主要线性流动和沿缝高方向的次要线性流

动<sup>[11]</sup>,如图1所示。

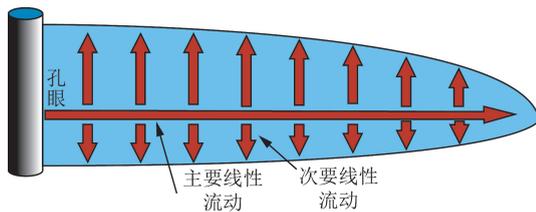


图1 黏性液体在裂缝中的流动模式

Fig.1 Flow pattern in hydraulic fracture of viscous fluid

- (3)次要线性流动满足平板压降方程,流压中心在与射孔位置相交的水平线上。
- (4)主要线性流动满足椭圆管流的压降方程。
- (5)缝宽的分布满足平面应变条件下的 England & Green 方程。
- (6)缝高扩展判据为 COD 准则。
- (7)选取流压中心的产层应力作为平均产层应力,地应力梯度沿流压中心向上为正值,沿流压中心向下为负值;流体重力对缝面应力状态的影响与地应力梯度的影响类似,但是符号相反。

假设条件(2)引入的流动模式比原有的一维流动假设更加接近真实情况,但裂缝截面依然处在平面应变状态,因此模型也是拟三维的。通过假设条件(3)和(7)可以绘制出裂缝任一横截面处的壁面应力状态,如图2所示。

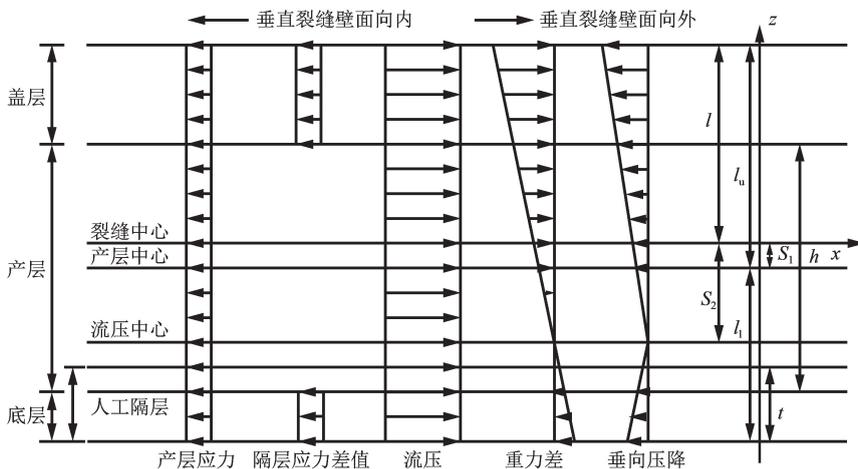


图2 裂缝壁面应力分布

Fig.2 Stress on fracture face

对图2中的应力分布情况,有如下说明:

- (1)图2中的第二项隔层应力差值是指盖层和底层的平均最小水平主应力与产层的平均最小水平主应力之差,因此第一项产层应力才有可能在整个垂向上均匀分布。
- (2)若考虑射孔孔眼在产层的中部则流压中心和产层中心重合,此时流压中心与裂缝中心的偏距可以用  $s$  表示。

- (3)重力差是指垂向的最小水平主应力梯度与压裂液重力梯度之和,由于最小水平主应力梯度必然比压裂液重力梯度大,因此形成了图2中第四项重力差的分布情况。

### 2 模型建立与求解

模型主要可以分为缝宽方程、缝高扩展判据和其他辅助方程3个部分。

## 2.1 缝宽方程

England & Green 方程<sup>[12]</sup>的形式为

$$\begin{cases} F(T) = -\frac{T}{2\pi} \int_0^T \frac{f(z)}{\sqrt{T^2 - z^2}} dz, \\ G(T) = -\frac{1}{2\pi T} \int_0^T \frac{zg(z)}{\sqrt{T^2 - z^2}} dz, \\ W = -16 \frac{1 - \nu^2}{E} \int_{|z|}^l \frac{F(T) + zG(T)}{\sqrt{T^2 - z^2}} dT. \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $f(z)$  为作用于裂缝壁面的偶分布应力, MPa;  $g(z)$  为作用于裂缝壁面的奇分布应力, MPa;  $F(T)$  为偶分布应力的中间积分函数, MPa · m;  $G(T)$  为奇分布应力的中间积分函数, MPa;  $z$  为裂缝垂向剖面上某一点到裂缝中心的距离, m;  $T$  为积分中间变量, m;  $\nu$  为泊松比;  $E$  为弹性模量, MPa;  $W$  为裂缝宽度, m;  $l$  为裂缝半高, m。

England & Green 公式的积分过程比较复杂, 在

$$\begin{aligned} W_2 = & -\frac{4\sigma_{\text{up}}z(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \ln(\sqrt{l^2 - (h/2-s)^2} + \sqrt{l^2 - z^2}) - \ln\sqrt{|(h/2-s)^2 - z^2|} - \frac{h/2-s}{|z|} \ln(|h/2-s|\sqrt{l^2 - z^2} + \right. \\ & \left. |z|\sqrt{l^2 - (h/2-s)^2}) - \frac{h/2-s}{|z|} \ln(l\sqrt{|(h/2-s)^2 - z^2|}) \right] - \frac{4\sigma_{\text{up}}(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \sqrt{l^2 - z^2} \arccos \frac{h/2-s}{l} - (h/2-s) \times \right. \\ & \left. \ln(\sqrt{l^2 - (h/2-s)^2} + \sqrt{l^2 - z^2}) + (h/2-s) \ln\sqrt{|(h/2-s)^2 - z^2|} + |z| \ln(|h/2-s|\sqrt{l^2 - z^2} + |z|\sqrt{l^2 - (h/2-s)^2}) - \right. \\ & \left. |z| \ln(l\sqrt{|(h/2-s)^2 - z^2|}) \right], \\ W_3 = & \frac{4\sigma_{\text{low}}z(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \ln(\sqrt{l^2 - (h/2+s)^2} + \sqrt{l^2 - z^2}) - \ln\sqrt{|(h/2+s)^2 - z^2|} - \frac{h/2+s}{|z|} \ln(|h/2+s|\sqrt{l^2 - z^2} + \right. \\ & \left. |z|\sqrt{l^2 - (h/2+s)^2}) + \frac{h/2+s}{|z|} \ln(l\sqrt{|(h/2+s)^2 - z^2|}) \right] - \frac{4\sigma_{\text{low}}(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \sqrt{l^2 - z^2} \arccos \frac{h/2+s}{l} - (h/2+s) \times \right. \\ & \left. \ln(\sqrt{l^2 - (h/2+s)^2} + \sqrt{l^2 - z^2}) + (h/2+s) \ln\sqrt{|(h/2+s)^2 - z^2|} + |z| \ln(|h/2+s|\sqrt{l^2 - z^2} + \right. \\ & \left. |z|\sqrt{l^2 - (h/2+s)^2}) - |z| \ln(l\sqrt{|(h/2+s)^2 - z^2|}) \right], \\ W_{41} = & -\frac{4z(1-\nu^2)(p_{\text{maxup}} - p_{\text{fmax}})}{E\pi(l+s)} \left( l \ln|z| - l \ln|l + \sqrt{l^2 - z^2}| + \frac{\pi}{4} \sqrt{l^2 - z^2} \right) + \frac{2p_{\text{maxup}}(1-\nu^2)}{E} \sqrt{l^2 - z^2} + \\ & \frac{2(1-\nu^2)(p_{\text{fmax}} - p_{\text{maxup}})}{E\pi(l+s)} \left[ z^2 \ln \frac{|z|}{|l + \sqrt{l^2 - z^2}|} + (\pi l - l) \sqrt{l^2 - z^2} \right] + \frac{4p_{\text{maxup}}z(1-\nu^2)}{E\pi} (\ln|l + \sqrt{l^2 - z^2}| - \ln|z|), \\ W_{42} = & \frac{4z(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \frac{lp_{\text{fmax}} + sp_{\text{maxup}}}{l+s} \right] \left( \ln \frac{|z|(\sqrt{l^2 - s^2} + \sqrt{l^2 - z^2})}{|l + \sqrt{l^2 - z^2}| \sqrt{|s^2 - z^2|}} - \frac{s}{|z|} \ln \frac{|s|\sqrt{l^2 - z^2} + |z|\sqrt{l^2 - s^2}}{l\sqrt{|s^2 - z^2|}} \right) + \\ & \frac{4(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \frac{lp_{\text{fmax}} + sp_{\text{maxup}}}{l+s} \right] \left( \sqrt{l^2 - z^2} \arcsin \frac{s}{l} + s \ln \frac{\sqrt{l^2 - s^2} + \sqrt{l^2 - z^2}}{\sqrt{|s^2 - z^2|}} - |z| \ln \frac{|s|\sqrt{l^2 - z^2} + |z|\sqrt{l^2 - s^2}}{l\sqrt{|s^2 - z^2|}} \right) + \\ & \frac{2(1-\nu^2)(p_{\text{fmax}} - p_{\text{maxup}})}{E\pi(l+s)} \left[ (s^2 - z^2) \ln \left( \frac{\sqrt{l^2 - s^2} + \sqrt{l^2 - z^2}}{\sqrt{|s^2 - z^2|}} \right) + \sqrt{l^2 - z^2} (l - \sqrt{l^2 - s^2}) + z^2 \ln \frac{|l + \sqrt{l^2 - z^2}|}{|z|} \right] - \\ & \frac{2z(1-\nu^2)(p_{\text{fmax}} - p_{\text{maxup}})}{E\pi(l+s)} \left[ \sqrt{l^2 - z^2} \arcsin \frac{s}{l} + \left( \frac{s^2}{|z|} - |z| \right) \ln \frac{|s|\sqrt{l^2 - z^2} + |z|\sqrt{l^2 - s^2}}{l\sqrt{|s^2 - z^2|}} \right], \\ W_{43} = & -\frac{4(1-\nu^2)p_{\text{maxlow}}z}{E\pi} \left( \ln \frac{\sqrt{l^2 - s^2} + \sqrt{l^2 - z^2}}{\sqrt{|s^2 - z^2|}} - \frac{s}{|z|} \ln \frac{|s|\sqrt{l^2 - z^2} + |z|\sqrt{l^2 - s^2}}{l\sqrt{|s^2 - z^2|}} \right) + \end{aligned}$$

应力分布的间断点或奇偶性改变的点都须通过奇偶分离才能带入公式进行积分。如果处理的非奇非偶应力太多, 被积函数就要分成很多段, 运算过程相当复杂, 因此须对应力分布进行合并简化。考虑到流体压力在裂缝中的任何位置都应该大于零, 可以将图2中的第三、四和五项加起来对缝宽的求解进行简化。图3即为简化后决定缝宽的四组应力。

单独受其中某一应力影响下的缝宽分别可用  $W_1$ 、 $W_2$ 、 $W_3$  和  $W_4$  表示, 其中  $W_4$  又由图3(d)中的3部分构成, 表示为  $W_{41}$ 、 $W_{42}$  和  $W_{43}$ 。最终的裂缝宽度应该为这6部分的线性叠加。

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_{41} + W_{42} + W_{43}. \quad (2)$$

其中

$$W_1 = -\frac{4(1-\nu^2)}{E} \sigma_{\text{mid}} \sqrt{l^2 - z^2},$$

$$\frac{4p_{\max}(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \arccos \frac{s}{l} \sqrt{l^2-z^2} + |z| \ln \frac{|s| \sqrt{l^2-z^2} + |z| \sqrt{l^2-s^2}}{l \sqrt{|s^2-z^2|}} - s \ln \frac{\sqrt{l^2-s^2} + \sqrt{l^2-z^2}}{\sqrt{|s^2-z^2|}} \right] +$$

$$\frac{4z(1-\nu^2)(p_{\max} - p_{\max\text{low}})}{E\pi(l-s)} \left[ \frac{|z|}{2} \ln \frac{|s| \sqrt{l^2-z^2} + |z| \sqrt{l^2-s^2}}{l \sqrt{|s^2-z^2|}} + \frac{\pi}{4} \sqrt{l^2-z^2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{s}{l} \sqrt{l^2-z^2} - \right.$$

$$\left. \left( l - \frac{s}{2} \right) \left( \ln \frac{\sqrt{l^2-s^2} + \sqrt{l^2-z^2}}{\sqrt{|s^2-z^2|}} - \frac{s}{|z|} \ln \frac{|s| \sqrt{l^2-z^2} + |z| \sqrt{l^2-s^2}}{l \sqrt{|s^2-z^2|}} \right) - \frac{s}{2} \ln \frac{\sqrt{l^2-s^2} + \sqrt{l^2-z^2}}{\sqrt{|s^2-z^2|}} \right] +$$

$$\frac{4(1-\nu^2)(p_{\max} - p_{\max\text{low}})}{E\pi(l-s)} \left[ \frac{\pi l \sqrt{l^2-z^2}}{2} - l \left( s \ln \frac{\sqrt{l^2-s^2} + \sqrt{l^2-z^2}}{\sqrt{|s^2-z^2|}} - |z| \ln \frac{|s| \sqrt{l^2-z^2} + |z| \sqrt{l^2-s^2}}{l \sqrt{|s^2-z^2|}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \sqrt{l^2-z^2} \arcsin \frac{s}{l} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{(l^2-s^2)(l^2-z^2)} + (s^2-z^2) \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{l^2-s^2} + \sqrt{l^2-z^2}}{\sqrt{|s^2-z^2|}} \right].$$

式中,  $W_1$ 、 $W_2$ 、 $W_3$ 、 $W_{41}$ 、 $W_{42}$  和  $W_{43}$  分别为仅受产层、盖层、底层和其余应力各部分影响下的缝宽, m;  $p_{\max}$  为最大缝内流压, MPa;  $p_{\max\text{up}}$  和  $p_{\max\text{low}}$  分别为上尖端和下尖端缝内流压, MPa;  $\sigma_{\text{mid}}$  和  $\sigma_{\text{low}}$  分别为产层和底层最小水平主应力, MPa;  $\sigma_{\text{up}}$  为盖层最小水平主应力, MPa;  $s$  为流压中心与裂缝中心的距离, m;  $h$  为产层厚度, m。

当裂缝未穿过产层时受到对称应力的影响, 裂缝宽度的最终表达式退化为

$$W' = W_1' + W_2' + W_3'. \tag{3}$$

其中

$$W_1' = \frac{4(1-\nu^2)}{E} (p_{\max} - \sigma_{\text{mid}}) \sqrt{l^2-z^2},$$

$$W_2' = \frac{-2z(1-\nu^2)}{E} (\gamma_f - \gamma_l) \sqrt{l^2-z^2},$$

$$W_3' = \frac{-4(1-\nu^2)k}{\pi E} \left[ l \sqrt{l^2-z^2} + z^2 \ln \frac{l + \sqrt{l^2-z^2}}{|z|} \right].$$

式中,  $W'$  为裂缝在层内延伸时的缝宽, m;  $W_1'$  为仅受净压力影响时的缝宽, m;  $W_2'$  为仅受重力差影响时的缝宽, m;  $W_3'$  为仅受对称摩擦阻影响时的缝宽, m;  $\gamma_f$  为地应力梯度, MPa/m;  $\gamma_l$  为流体重力梯度, MPa/m;  $k$  为对称缝中垂向压降, MPa/m。

文献[13]和[14]中认为式(3)中对称摩擦阻对缝宽的影响  $W_3'$  可表示为

$$W_e' = \frac{4(1-\nu^2)k}{\pi E} [l \sqrt{l^2-z^2} - z^2 \ln(l + \sqrt{l^2-z^2})]. \tag{4}$$

式中,  $W_e'$  为错误公式计算出的仅受对称摩擦阻影响的缝宽, m。

将式(3)和式(4)的模拟结果绘制曲线, 如图4所示。图4中黑色实线为式(3)得出的结果, 而蓝色点线为式(4)得出的结果。实线在缝高范围内  $[-30, 30]$  为负, 表示摩擦阻的影响是降低缝内压力, 减小缝宽。点线在裂缝中心为正, 认为摩擦阻的存在增大了缝宽, 这明显与实际不符。不仅如此, 在式

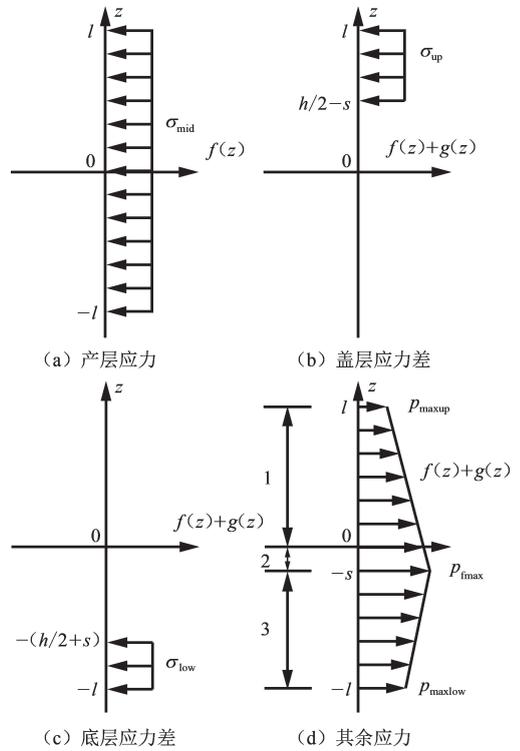


图3 决定缝宽的四组应力

Fig. 3 Four stress groups deciding fracture width

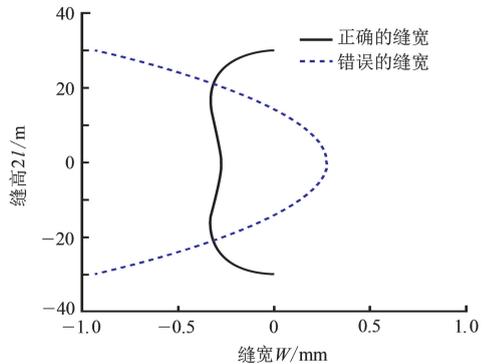


图4 仅有对称摩擦阻影响下的裂缝宽度

Fig. 4 Fracture width only under the influence of vertical symmetric resistance

(4)中裂缝尖端处摩阻对缝宽的影响不等于零,这也与实际不符,因为在裂缝的尖端,两个壁面会有交点,该尖端相当于一个固定约束,不论受到任何应力作用,该处的相对位移必须为零。在计算对称摩阻的影响时,应该采用式(3)而非式(4)。

### 2.2 缝高扩展判据

缝高扩展判据主要有 Rice 推导的应力强度因子公式<sup>[15]</sup>和 Clifton 引入的缝高扩展判据(原文献[7]中的公式错误,具体可见下文的推导过程和参考文献[16])两种。

$$\begin{cases} K_{up} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l p(z) \sqrt{\frac{l+z}{l-z}} dz, \\ K_{low} = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_l^{-l} p(z) \sqrt{\frac{l-z}{l+z}} dz. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} W \Big|_{z=l-a} = \frac{4K_{Icup}(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{2a}{\pi}}, \\ W \Big|_{z=a-l} = \frac{4K_{Iclow}(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{2a}{\pi}}. \end{cases} \quad (6)$$

式中, $p(z)$ 为缝内流压,MPa; $K_{up}$ 和  $K_{low}$ 分别为上尖端和下尖端应力强度因子,MPa·m<sup>1/2</sup>; $K_{Icup}$ 和  $K_{Iclow}$ 分别为上尖端和下尖端断裂韧性,MPa·m<sup>1/2</sup>; $a$ 为距离裂缝尖端的微小距离,m。

文献[17]~[19]中称式(5)为静态应力强度因子,式(6)为动态应力强度因子。为了求证这种说法,通过数学弹性力学对式(6)进行推导。

假设在无限大平面中有一长为  $2l$  的裂缝处在平面应变状态。以该裂缝的中心为原点,缝长方向为  $x$  轴建立直角坐标系,如图 5 所示。

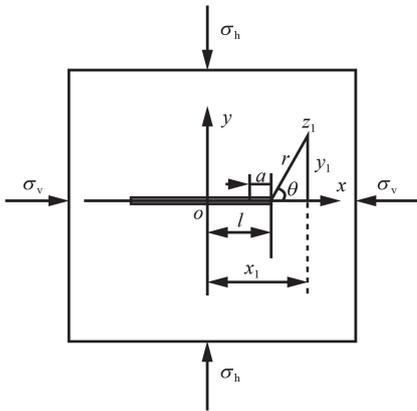


图 5 扩展判据几何示意图

Fig. 5 Geometry sketch diagram of crack propagation criterion

根据 Westergaard 应力函数理论,在边界条件不相等的情况下将复空间的应力函数假设为

$$\Phi = \text{Re}(\bar{Z}) + y\text{Im}(\bar{Z}) + \frac{A}{2}(x^2 - y^2). \quad (7)$$

式中, $\bar{Z}$ 为  $Z$  的积分,MPa·m; $\bar{Z}$ 为  $\bar{Z}$  的积分,MPa·m<sup>2</sup>; $Z$ 为某个解析函数,MPa; $\Phi$ 为应力函数,MPa·m<sup>2</sup>; $A$ 为应力函数中的待定系数,MPa。

由柯西-黎曼条件、应力函数定义可得各应力分量的表达式为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \text{Re}(Z) - y\text{Im}(Z') - A, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \text{Re}(Z) + y\text{Im}(Z') + A, \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -y\text{Re}(Z'). \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\sigma_x$ 为  $x$  方向正应力,MPa; $\sigma_y$ 为  $y$  方向正应力,MPa; $\tau_{xy}$ 为  $xoy$  平面切应力,MPa。

应力函数须满足 3 个边界条件:① $|x| > l$  时, $\sigma_y > \sigma_h$ ;② $|x| < l$  时, $\sigma_y = 0$ ;③无穷远处, $\sigma_y = \sigma_h$ , $\sigma_x = \sigma_v$ (若考虑缝内有均匀压力作用,则  $\sigma_h$  为最小水平主应力与缝内压力的差值<sup>[20]</sup>)。根据前两个边界条件可以假设解析函数  $Z$  有如下形式:

$$Z = \frac{z\sigma_h}{\sqrt{z^2 - l^2}} - A. \quad (9)$$

利用边界条件③、式(8)和(9)可以解出在  $x$  轴上  $z$  趋于无穷大时, $\sigma_y = \sigma_h$ , $\sigma_x = \sigma_h - 2A$ ,因此  $A = (\sigma_h - \sigma_v)/2$ 。

将式(9)转换为尖端的局部坐标系,有

$$Z = \frac{\sigma_h(re^{i\theta} + l)}{\sqrt{r^2 e^{2i\theta} + 2lre^{i\theta}}} - \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2}. \quad (10)$$

式中, $r$ 为裂缝尖端局部坐标中的径向距离,m; $\theta$ 为裂缝尖端局部坐标中与  $x$  轴正向的夹角,(°); $\sigma_h$ 为最小水平主应力,MPa; $\sigma_v$ 为垂向应力,MPa。

考虑  $r \ll l$ ,可以略去分子中的  $re^{i\theta}$ 和分母中的  $r^2 e^{2i\theta}$ 并分离实部和虚部,得

$$Z = \frac{\sigma_h \sqrt{l}}{\sqrt{2r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2}. \quad (11)$$

解析函数  $Z$  的导数为

$$Z' = \frac{-\sigma_h l^2}{(r^2 e^{2i\theta} + 2lre^{i\theta})^{\frac{3}{2}}}. \quad (12)$$

略去式(12)中的无穷小量并分离实部和虚部有

$$Z' = \frac{-\sigma_h \sqrt{l}}{(2r)^{\frac{3}{2}}} \left( \cos \frac{3}{2}\theta - i \sin \frac{3}{2}\theta \right). \quad (13)$$

将式(11)和(13)带入式(8)可得应力分量的表达式为

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - (\sigma_h - \sigma_v), \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ K_I = \sigma_h \sqrt{\pi l}. \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $K_I$  为 I 型应力强度因子,  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 。

在  $r \ll l$  时,  $(\sigma_h - \sigma_v)$  可以忽略, 运用平面应变条件下的物理方程和几何方程, 可得位移分布为

$$\begin{cases} u = \frac{K_I(1-\nu)}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1-2\nu}{1-\nu} + \left( \frac{1}{1-\nu} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \\ v = \frac{K_I(1-\nu)}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - \left( \frac{1}{1-\nu} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{cases} \quad (15)$$

式中,  $u$  为忽略高阶小量的裂缝面切向位移;  $v$  为忽略高阶小量的裂缝面法向位移,  $\text{m}$ 。

在距离尖端微小距离  $a$  处裂缝的张开位移应该等于  $2v$ 。令  $r=a$ ,  $\theta=\pi$ 。可以导出 Clifton 引入的缝高扩展判据 ( $a \ll l$ ) 为

$$W \Big|_{r=a} = 2v = \frac{4K_I(1-\nu)}{G} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = \frac{4K_I(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{2a}{\pi}}. \quad (16)$$

由式(16)可知, 原始文献[7]中的表达式是错误的。从该推导过程不难看出, 全程均未考虑载荷变化和裂缝扩展。最终的表达式也只是裂缝尖端张开位移(式(16)中表示为缝宽)与断裂韧性的关系, 并没有扩展速度或者加载速度对裂缝扩展的影响。由此可知, 式(6)是一个完全弹性条件下的裂缝张开位移判据, 并不是所谓的动态应力强度因子。Clifton 引入该判据, 是为了仅让裂缝尖端的应力、应变场控制裂缝的延伸, 以提高全三维模型的计算速度。

采用式(5)模拟时, 须将如图3的应力分布情况带入式(5), 重新计算一组新的缝高扩展判据。采用式(6)模拟时, 可直接令式(2)中  $z=l-a$  和  $z=a-l$  处的缝宽等于式(6)中的临界值(方程的右端), 并联立二式解非线性方程组得到半缝高  $l$  和流压中心与裂缝中心的距离  $s$ 。再将得到的  $l$  和  $s$  带入式(2)即可计算缝宽截面。为了避免再次推导基于式(5)的复杂方程, 采用式(6)作为本文的缝高扩展判据。

### 2.3 COD 判据应用

COD 判据一般应用于弹塑性情况, 须对裂缝长度进行小范围屈服修正, 在原有裂缝长度的基础上

加上  $r_y$ 。岩石的断裂韧性一般为  $1 \sim 2 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ , 屈服强度大约为  $20 \text{ MPa}$ 。通过估计出的屈服区域尺寸最多只能达到毫米级别<sup>[21]</sup>。

$$r_y = \frac{(1-2\nu)^2 K_{IC}^2}{\pi \sigma_s^2}. \quad (17)$$

式中,  $\sigma_s$  为屈服应力,  $\text{MPa}$ ;  $K_{IC}$  为断裂韧性,  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ;  $r_y$  为等效缝长的修正因子,  $\text{m}$ 。

不考虑式(17)的修正不会造成太大误差, 且回避了测试屈服强度带来的困难, 因此本模型中并没有进行小范围屈服修正。

对于 COD 扩展判据的应用, 值得注意的是变量  $a$  的取值。一些文献认为  $a$  的取值应该约为  $0.5 \text{ m}$ , 但并未给出详细的论证过程。在复分析<sup>[22]</sup>和断裂力学理论的指导下可进行不同  $a$  取值的误差分析。将式(8)带入平面应变下的物理方程<sup>[23]</sup>可得  $y$  方向的位移为

$$v^* = \frac{1-\nu}{2G} \left[ 2\text{Im}(\bar{Z}) + \frac{r\sin\theta}{1-\nu} \left( \frac{\sigma_h - \sigma_v}{2} - \text{Re}(Z) \right) \right]. \quad (18)$$

式中,  $G$  为剪切模量,  $\text{MPa}$ ;  $v^*$  为精确的裂缝面法向位移,  $\text{m}$ 。

通过复函数积分、柯西-黎曼条件和坐标转换, 可由式(9)的解析函数得到  $\theta=\pi$  时各函数的表达式为

$$\begin{cases} Z = \frac{(l-r)\sigma_h i}{\sqrt{2lr-r^2}}, \\ \bar{Z} = -\frac{\sigma_h - \sigma_v}{2}(l-r) + \sigma_h \sqrt{2lr-r^2} i. \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)带入式(18)可得局部坐标系下裂缝壁面  $y$  方向位移的表达式为

$$v^* = \frac{2\sigma_h(1-\nu^2)}{E} \sqrt{2rl-r^2}. \quad (20)$$

从式(20)可以看出,  $y$  方向的位移(裂缝半宽)不受垂向应力的影响, 这与长期以来裂缝模拟的基本思想吻合。令无因次距离  $D=r/l$ , 结合式(20)和(15)可得无因次相对误差  $\Psi$  的计算式为

$$\Psi = \frac{v-v^*}{v^*} = \frac{\sqrt{2D}-\sqrt{2D-D^2}}{\sqrt{2D-D^2}}. \quad (21)$$

将式(21)的模拟结果绘制在图6中, 可以看出事实上  $a$  (即  $r$ ) 并没有最优取值。  $a$  越小越好, 但不能等于零, 否则式(6)和式(2)会线性相关, 无法求解缝高。将  $a$  取为  $0.5 \text{ m}$  确实已经具有了较高精度, 但按照目前计算机的运行能力将  $a$  取得更小也完全可以实现。建议将  $a$  取到  $0.01 \text{ m}$  以下, 尽量提高运算精度。

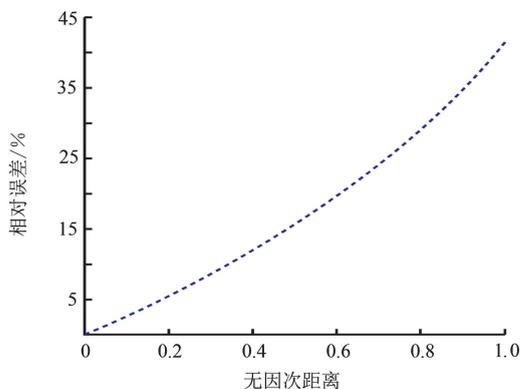


图 6 无因次距离对误差的影响

Fig. 6 Influence of dimensionless distance on relative error

2.4 其他辅助方程

主要线性流方向压降为

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2^{n+1} k_{\mu}}{W_{\max}^{2n+1}} \left[ \frac{8Q(2n+1)}{3 n \pi l} \right]^n \quad (22)$$

式中,  $k_{\mu}$  为稠度系数,  $\text{MPa} \cdot \text{s}^n$ ;  $n$  为流态指数;  $Q$  为沿缝长方向的流量,  $\text{m}^3/\text{s}$ ;  $W_{\max}$  为垂向上的最大缝宽,  $\text{m}$ ;  $x$  为缝长方向某一点到井底距离,  $\text{m}$ 。

次要线性流向上流动的压降  $k_1$  为

$$k_1 = \frac{dp}{dz} = -\frac{2^{n+1} k_{\mu}}{W_{\max}^{2n+1}} \left[ \frac{(2n+1)}{n} v_{\text{up}} W_{\text{up}} \right]^n - \gamma_1 + \gamma_f \quad (23)$$

式中,  $v_{\text{up}}$  为向上流动的流速,  $\text{m}/\text{s}$ ;  $W_{\text{up}}$  为流压中心以上的平均缝宽,  $\text{m}$ 。

次要线性流向下流动的压降  $k_2$  为

$$k_2 = \frac{dp}{dz} = -\frac{2^{n+1} k_{\mu}}{W_{\max}^{2n+1}} \left[ \frac{(2n+1)}{n} v_{\text{low}} W_{\text{low}} \right]^n + \gamma_1 - \gamma_f \quad (24)$$

式中,  $v_{\text{low}}$  为向下流动的流速,  $\text{m}/\text{s}$ ;  $W_{\text{low}}$  为流压中心以下的平均缝宽,  $\text{m}$ 。

考虑初滤失的物质平衡方程为

$$-\frac{dQ(x,t)}{dx} = \frac{2lC}{\sqrt{t-t_p(x)}} + \frac{2V_{\text{sp}} dl}{dt} + \frac{dA_e(x,t)}{dt} \quad (25)$$

式中,  $C$  为滤失系数,  $\text{m}/\text{s}^{1/2}$ ;  $t$  为时间,  $\text{s}$ ;  $t_p$  为水力裂缝中某处刚开始接触液体的时刻,  $\text{s}$ ;  $A_e$  为裂缝截面积,  $\text{m}^2$ ;  $V_{\text{sp}}$  为初滤失量,  $\text{m}^3/\text{m}^2$ 。

2.5 模型求解

模型的求解过程如图 7 所示。

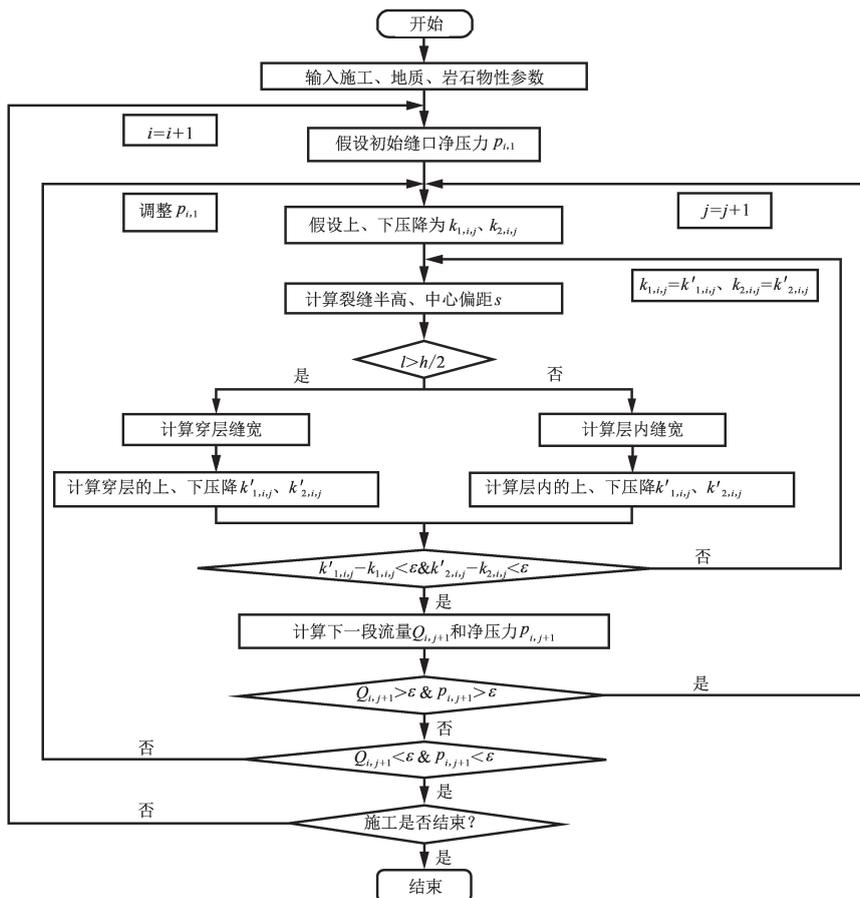


图 7 计算程序框图

Fig. 7 Flow chart of computer program

### 3 实例模拟分析

#### 3.1 高应力差的精度

Y-324 井压裂目标层厚 14 m, 隔层力学性质良好, 顶层应力差 5.65 MPa, 底层应力差 7.32 MPa。盖层、产层和底层的断裂韧性分别为 1.8、1.1 和 2.2 MPa · m<sup>1/2</sup>, 弹性模量和泊松比分别为 23 GPa 和 0.28, 滤失系数变化较大取平均值约为 1.74 × 10<sup>-4</sup> m/s<sup>1/2</sup>, 稠度系数和流态指数分别为 1.4 MPa · s<sup>n</sup> 和 0.6。目标井采用 3.7 m<sup>3</sup>/min 的中高排量注液 50 min 后得到了图 8 中的施工监测净压力曲线。

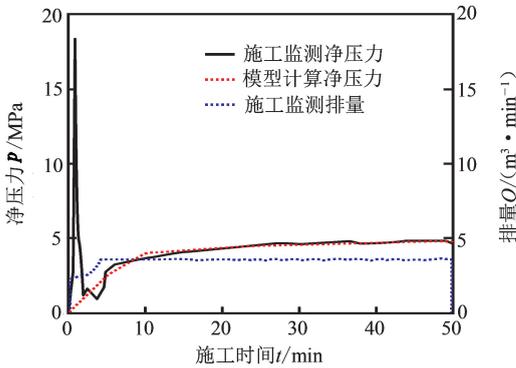


图 8 Y-324 井实例分析

Fig. 8 Case study of well Y-324

将该井的相关地质和施工参数代入本文模型后计算得到了图 8 红色的净压力曲线。对比表明, 在后期注液稳定的时段, 模型计算的净压力与监测得到的净压力拟合程度很高; 但在施工前期, 由于本文模型没有考虑地层起裂等因素的影响, 净压力差异较大。但总体来说计算结果与监测结果符合良好, 模型对净压力的预测具有较高精度。

Y-324 井试井解释缝长为 115.1 m, 测井解释上缝高为 21.82 m, 下缝高为 10.71 m。利用经典模型模拟的水力裂缝动态缝长为 108 m, 上缝高为 24.82 m, 下缝高为 15.3 m; 可以看出经典模型模拟的缝高偏大、缝长不足。本文模型考虑了垂向压降, 缝高会明显受限, 模拟输出的动态缝长为 115 m, 上缝高为 20.25 m, 下缝高为 12.75 m, 比常规模型更加接近实测结果。

图 9 为不同注液时刻的裂缝几何形态, 裂缝在施工初期延伸快, 随着时间的推移延伸越来越慢, 特别是下缝高基本处在停滞状态。只要能够选取高应力隔层或采取行之有效的控缝高技术、直接或间接地增加隔层应力差就能够实现在不沟通底水的条件下对油气藏实施较大规模的改造。

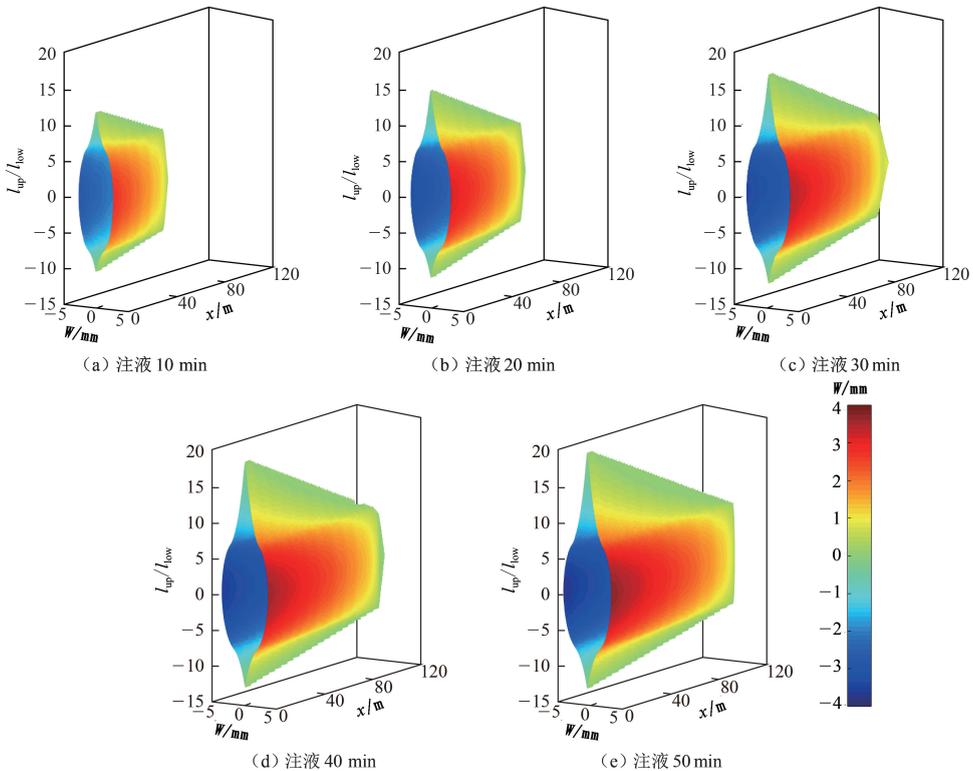


图 9 Y-324 井裂缝几何形态

Fig. 9 Fracture geometry of well Y-324

### 3.2 低应力差的模拟

常规拟三维模型一般只能模拟隔层应力差大于2 MPa的情况,不能对隔层应力差不足存在缝高失控的裂缝三维延伸过程进行模拟。本文中建立的模型考虑了垂向压降变化,可以在一定程度上解决此类问题。

X-11324井的主力产层巨厚,不存在明显的岩性和应力隔层,盖层、产层和底层的断裂韧性约为1.1、1.2和1.2 MPa·m<sup>1/2</sup>,弹性模量和泊松比分别为40 GPa和0.25,由于有裂缝平均滤失量大,滤失系数取 $2.3 \times 10^{-4}$  m/s<sup>1/2</sup>,稠度系数和流态指数分别为1.2 MPa·s<sup>n</sup>和0.52。目标井顶、底的隔层应力差仅有1.0和1.2 MPa,常规的拟三维模型不能进行有效模拟。但应用本文中建立的模型可以输出近似半圆形的裂缝形态(图10),与施工经验吻合。本文中建立的模型不仅可以提高在高应力差条件下裂缝模拟的精度,还可以解决常规拟三维模型不能进行低应力差条件下裂缝模拟的问题。

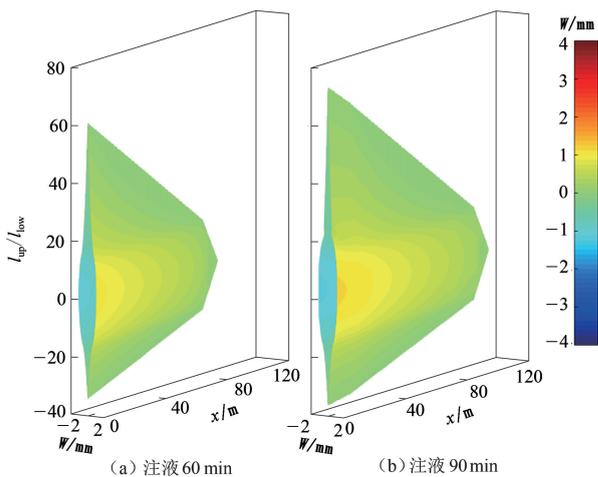


图10 X-11324井裂缝几何形态

Fig. 10 Fracture geometry of well X-11324

图10的模拟结果显示当隔层应力差不足时,上缝高和下缝高的延伸都难以控制;但主要还是在重力差因素的影响下向上延伸。由于缝高失控,缝宽会大幅度降低,施工90 min后也不到4 mm,大大限制了加砂量,影响压后裂缝导流能力。

## 4 结论

(1)通过引入双线性流动模式和垂向摩阻,建立了改进的裂缝拟三维延伸模型,该模型可以解决常规模型缝高估计过大和不能模拟低应力差储层裂缝延伸的问题。

(2)推导了在复杂应力状态作用下的裂缝宽度表达式,指出了前期拟三维模型中关于对称摩阻对

缝宽影响的错误认识,认为模拟时应该选取本文推导的计算式。

(3)推导了Clifton引入的缝高扩展判据,指出了原始文献中的错误,并验证了该判据的精度,认为应该将判据中的变量距离尖端的微小距离 $a$ 取到0.01 m以下,以尽量提高精度。

(4)对于常规水力裂缝无须对裂缝尖端进行小范围屈服修正,在对缝高进行模拟时可将地层作为线弹性体。

(5)当隔层应力差较大时下缝高的延伸极其缓慢,有利于底水油藏的压裂;当隔层应力差极小时裂缝高度与长度近似相等,但由于重力差作用,上、下缝高仍有明显差异。

### 参考文献:

- [1] 孙致学,姚军,樊冬艳,等. 基于离散裂缝模型的复杂裂缝系统水平井动态分析[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2014, 38(2): 109-115.  
SUN Zhixue, YAO Jun, FAN Dongyan, et al. Dynamic analysis of horizontal wells with complex fractures based on a discrete-fracture model[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2014, 38(2): 109-115.
- [2] 郭建春,刘恒,曾凡辉. 裂缝变缝宽形态对压裂井长期产能的影响[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2015, 39(1): 111-115.  
GUO Jianchun, LIU Heng, ZENG Fanhui. Influence of varying fracture width on fractured wells long-term productivity[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2015, 39(1): 111-115.
- [3] ECONOMIDES M J. Modern fracturing: enhancing natural gas production[M]. Houston: ET Publishing, 2007.
- [4] PALMER I D, CARROLL H B. Three-dimensional hydraulic fracture propagation in the presence of stress variations[J]. SPE Journal, 1983, 23(6): 870-878.
- [5] PALMER I D, CARROLL H B. Numerical solution for height and elongated hydraulic fractures [R]. SPE 11627, 1983.
- [6] PALMER I D, LUISKUTTY C T. A model of the hydraulic fracturing process for elongated vertical fractures and comparisons of results with other models [R]. SPE 13864, 1985.
- [7] CLIFTON R J, ABOU-SAYED A S. On the computation of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures [R]. SPE 7943, 1979.
- [8] CLIFTON R J, ABOU-SAYED A S. A variational approach to the prediction of the three-dimensional geometry

- try of hydraulic fractures[R]. SPE 9879, 1981.
- [9] WEIJERS L, MAYERHOFER M, CIPOLLA C. Developing calibrated fracture growth models for various formations and regions across the United States [R]. SPE 96080, 2005.
- [10] MORALES R H. Microcomputer analysis of hydraulic fracture behavior with a pseudo-three-dimensional simulator[J]. SPE Production Engineering, 1989, 4(1): 69-74.
- [11] CHEN Z. Finite element modelling of viscosity-dominated hydraulic fractures[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2012, 88:136-144.
- [12] ENGLAND A H, GREEN A E. Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity [J]. Proc Gamb Phil, 1963, 59(2):489-500.
- [13] 李勇明. 三维酸压数值模拟及优化设计[D]. 成都:西南石油大学, 2000.
- LI Yongming. Three dimension acid fracturing numerical simulation and optimal design[D]. Chengdu: Southwest Petroleum University, 2000.
- [14] 赵志红, 郭建春, 李勇明, 等. 榆林气田压裂裂缝高度影响因素正交试验分析[J]. 天然气勘探与开发, 2008, 31(1):32-35.
- ZHAO Zhihong, GUO Jianchun, LI Yongming, et al. Orthogonal experiment analysis on the influence factors of fracture height of Yulin gasfield fracturing [J]. Natural Gas Exploration and Development, 2008, 31(1):32-35.
- [15] RICE J R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture[J]. Fracture: An Advanced Treatise, 1968, 2: 191-311.
- [16] GIDLEY J L. Recent advances in hydraulic fracturing [M]. New York: SPE, 1989.
- [17] 陈锐. 控缝高水力压裂人工隔层厚度优化设计方法研究[D]. 成都:西南石油大学, 2006.
- CHEN Rui. Method for optimizing artificial barrier thickness of fracture height control hydraulic fracturing [D]. Chengdu: Southwest Petroleum University, 2006.
- [18] 李哲, 杨兆中, 李小刚. 水力压裂模型的改进及其算法更新研究(上)[J]. 天然气工业, 2005, 25(1):88-92.
- LI Zhe, YANG Zhaozhong, LI Xiaogang. Improved model for hydraulic fracturing and its algorithm renewal study (1)[J]. Natural Gas Industry, 2005, 25(1):88-92.
- [19] 李哲, 杨兆中, 李小刚. 水力压裂模型的改进及其算法更新研究(下)[J]. 天然气工业, 2005, 25(2):100-103.
- LI Zhe, YANG Zhaozhong, LI Xiaogang. Improved model for hydraulic fracturing and its algorithm renewal study (2)[J]. Natural Gas Industry, 2005, 25(2):100-103.
- [20] 赵建生. 断裂力学及断裂物理[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2003.
- [21] SENSENY P E, PFEIFLE T W. Fracture toughness of sandstones and shales[R]. ARMA 84-390, 1984.
- [22] RUDIN W. Real and complex analysis[M]. New York: McGraw-Hill Education, 1987.
- [23] SADD M H. Elasticity: theory, applications, and numerics[M]. Salt Lake City, Utah: Academic Press, 2014.

(编辑 李志芬)