文章编号:1673-5005(2016)01-0116-05　　doi:10.3969/j. issn. 1673-5005. 2016. 01. 016

基于应变梯度理论的纳米悬臂梁的大位移分析

刘建林, 曹高峰

(中国石油大学储运与建筑工程学院,山东青岛 266580)

摘要:以 Aifantis 发展的应变梯度理论为基础,探讨微纳米尺度下线弹性悬臂梁受集中载荷作用下的大变形问题。基于 Euler-Bernoulli 梁理论,考虑应变梯度的影响,建立悬臂梁发生大变形时的弹性微分方程,并给出相应的边界条件。通过打靶法并借助于 MathCAD 软件,求得考虑应变梯度时悬臂梁在自由端集中载荷作用下的挠度数值解。结果表明,在微纳米尺度下应变梯度对悬臂梁的变形有较大影响,弹性变形梯度系数对梁发生大变形比发生小变形时的影响更明显,且弹性梯度系数对于梁的变形有抑制作用。

关键词:纳米悬臂梁; 大变形; 应变梯度; 能量法; 变分

中图分类号:TB 383　　**文献标志码**:A

引用格式:刘建林,曹高峰. 基于应变梯度理论的纳米悬臂梁的大位移分析[J]. 中国石油大学学报(自然科学版),2016,40(1):116-120.

LIU Jianlin, CAO Gaofeng. Large deflection analysis of a nanoscaled cantilever beam with strain gradient effect[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science),2016,40(1):116-120.

Large deflection analysis of a nanoscaled cantilever beam with strain gradient effect

LIU Jianlin, CAO Gaofeng

(*College of Pipeline and Civil Engineering in China University of Petroleum*, *Qingdao* 266580, *China*)

Abstract:In this study, we discuss the deformation of a micro/nanoscaled cantilever under a concentrated load. The modeling is based on the strain gradient theory developed by Aifantis. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, and considering the effect of strain gradient, the governing equation of the large deformation of a cantilever was built, and the boundary conditions were given. Using the shooting method and the MathCAD software, we obtain the numerical solution of a cantilever with strain gradient, under a concentrated load at the free end. This solution is compared with that of a beam with infinitesimal deformation. The result shows that at the micro/nano scale, the strain gradient has a great effect on the cantilever's deformation. In this case, the gradient coefficient affects a beam more significantly when it is in the finite deformation than in the infinitesimal deformation. Moreover, the gradient coefficient will restrain the deformation of the beam.

Keywords:nanoscaled cantilever; large deformation; strain-gradient; energy method; variation

随着国际上微纳米技术的发展,对于纳米线、纳米管、纳米纤维等一维纳米结构进行精确的变形分析成为当前研究的热点。材料在微纳米尺度下的力学特性与其在宏观尺度下的力学特性有很大的差异,表现出很强的尺寸依赖性[1-7]。如何定量刻画该效应则成为当今连续介质力学中具有挑战性的工作。由于经典弹塑性理论的本构关系中未包含任何特征尺度,因此,这些理论不能合理地解释上述尺寸依赖性的实验现象。为了全面研究微纳米尺度下材料的尺寸效应,国内外很多研究人员相继提出了各种应变梯度理论。例如 Aifantis 等[8-10]用等效应变的一次和二次拉普拉斯算子表示应变梯度,并将其引入到经典塑性理论的本构中。然而在该理论中未定义应变梯度的功共轭量。Fleck 和 Hutchin-

收稿日期:2015-05-26

基金项目:国家自然科学基金项目(11272357);山东省杰出青年自然科学基金项目(JQ201302)

作者简介:刘建林(1977-),男,教授,博士,研究方向为表面仿生力学、结构非线性分析、软物质力学等。E-mail:liujianlin@ upc. edu. cn。

son[11-12] 及 Fleck 等[1] 从位错观点出发考虑了材料的塑性变形,并先后发展了两种应变梯度塑性理论:CS 理论[1,11] 和 SG 理论[12]。这两种理论本质上都是偶应力理论,在经典塑性理论的基础上考虑了应变梯度的影响,其理论预测基本与实验结果吻合。高华健和黄永刚等[13-14] 基于位错机制发展了一种应变梯度塑形理论,这种理论给出了一个多尺度、分层次的框架,从而实现了宏观塑性理论和位错理论的联系。陈少华等[15] 在连续介质力学的框架内提出了一种基于纳米材料的表面能量密度的新理论,该理论利用表面能量密度和表面弛豫参数表征 FCC 金属纳米薄膜的双轴拉伸性能,理论分析与实验结果基本吻合。在微纳米器件的工作过程中,作为其基本元件的纳米线往往会承受极为复杂的变形,甚至产生大变形现象。笔者基于该理论分析微纳米尺度下线弹性悬臂梁在自由端受竖直方向的集中载荷作用下的大变形问题。这一问题涉及到细长结构的几何非线性,同时材料的本构关系中又包含了应变梯度效应,因而该问题更具有挑战性。在经典弹性力学理论下对微梁的弹性应变表达式进行修正,推导出考虑应变梯度效应的控制微分方程组。采用打靶法求得悬臂梁发生大变形时挠度的数值解。所得结果与微悬臂梁发生小变形时的解答进行对比。

1　考虑应变梯度效应的本构关系

对于宏观尺寸的均匀材料,如经典的线弹性、小变形、各向同性弹性体,其本构关系满足 Hooke 定律,一般可以写为

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}. \tag{1}$$

其中

$$\mu=\frac{E}{2(1+\upsilon)},\ \delta_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j;\\0,\ i\neq j.\end{cases}$$

式中,σ_{ij} 为应力张量分量;ε_{ij} 为应变张量分量;μ 和 λ 为材料的拉梅系数;E 为弹性模量;υ 为泊松比。

当材料的尺寸缩小到微纳米尺度范畴,将会表现出迥异于宏观材料的物理、化学和力学行为。为了全面分析这些力学行为的来源,须考虑其表征尺寸效应的内禀长度,此时须修正经典的 Hooke 定律的本构关系。根据 Aifantis 发展的应变梯度理论[8],考虑应变梯度效应的线弹性材料本构方程可以写成:

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\ \varepsilon_{\kappa\kappa}-c(2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\ \varepsilon_{\kappa\kappa})_{,mm}. \tag{2}$$

式中,c 为弹性梯度系数;符号 $(\ )_{,x}=\dfrac{\partial(\ )}{\partial x}$,$(\ )_{,xx}=\dfrac{\partial^2(\ )}{\partial x^2}$。

将纳米线简化为一根一维的梁,则其应力和应变分量仅存在着沿轴向的数值 σ 和 ε,从而其本构关系可以退化为

$$\sigma=E(\varepsilon-c\nabla^2\varepsilon). \tag{3}$$

其中,拉普拉斯算子 $\nabla^2(\ )=(\ )_{,mm}$。

采用该修正的本构关系研究一根微纳米尺度的悬臂梁在集中力作用下的大变形。

2　悬臂梁变形

2.1　大位移

如图 1 所示,建立笛卡尔直角坐标系 $O-xy$。图中,一根悬臂梁左端固定于 O 点,其自由端承受竖直方向的集中载荷 P 作用。梁的纵向对称面位于平面 xy 之中。梁的模型假设为经典的 Euler-Bernoulli 类型,即其横截面仅仅发生刚性的转动。悬臂梁的长度表示为 L。在集中力 P 作用下,梁的自由端将沿着 x 轴的负方向移动,其在水平方向的位移表示为 Δx。用 $w=w(x)$ 表示悬臂梁上任意一点的挠度,则其在直角坐标系里的坐标为 (x,w)。由于梁发生大位移,故引入图 1 中所示的弧坐标,其起点为坐标原点,梁轴线上任意一点的的弧长设为 s。悬臂梁上任意一点的切线与水平线的夹角记为倾斜角 $\theta=\theta(s)$。

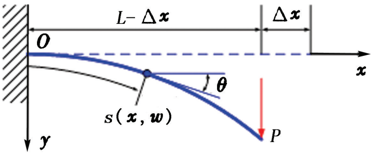

图 1　悬臂梁发生大变形时的示意图

Fig. 1　Schematic diagram of cantilever beam with large deformation

根据 Euler-Bernoulli 梁假设,梁的横截面仍为刚性。考虑其几何关系,则悬臂梁上任意一截面内任意一点的应变可以表示为

$$\varepsilon=\frac{y}{\rho}=y\theta'. \tag{4}$$

式中,ρ 为悬臂梁上该点的曲率半径。

对图示悬臂梁的弹性线存在几何关系:

$$\begin{cases}x'=\cos\theta,\\w'=\sin\theta.\end{cases} \tag{5}$$

其中,记号 $(\ )'=\dfrac{\mathrm{d}(\ )}{\mathrm{d}s}$,为对弧长的坐标,以区别于对 x 的坐标。

在左侧固定端,悬臂梁的固有边界条件为位移和转角均为零,故可以描述为

$$x(0)=0,w(0)=0,\theta(0)=0. \tag{6}$$

对于发生大变形的悬臂梁,根据式(3)、(4),则该处横截面上任一点的应力可以写成

$$\sigma=E(\varepsilon-c\varepsilon'')=Ey(\theta'-c\theta'''). \tag{7}$$

利用式(7)的表达式,考虑到应变能可以通过应力和应变的表达式积分而来,则该悬臂梁的应变能为

$$U_{\mathrm{E}}=\frac{1}{2}\int_A\int_0^L\sigma\varepsilon\,\mathrm{d}s\mathrm{d}A=\frac{1}{2}EI\int_0^L(\theta'^2-c\theta'\theta''')\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

式中,A 为悬臂梁的横截面面积;I 为截面惯性矩。

该悬臂梁系统的总势能包含弹性应变能和外力功两部分,故其表达式写为

$$\Pi=\frac{1}{2}EI\int_0^L(\theta'^2-c\theta'\theta''')\,\mathrm{d}s-Pw(L)+\int_0^L\lambda(w'-\sin\theta)\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

其中,λ 为 Lagrange 乘子,以约束式(5)中的几何关系。

对方程(9)的总势能进行变分,并且进行分部积分,可以得到

$$\begin{aligned}\delta\Pi=&EI\int_0^L\theta'\delta\theta'\mathrm{d}s-P\delta w(l)-\frac{1}{2}EIc\int_0^L(\theta'\delta\theta'''+\theta'''\delta\theta')+\int_0^L[\delta\lambda(w'-\sin\theta)+\lambda(\delta w'-\cos\theta\delta\theta)]\,\mathrm{d}s\\=&[EI\theta'\delta\theta]_0^L-EI\int_0^L\theta''\delta\theta\mathrm{d}s-P\delta w(L)+\int_0^L\delta\lambda(w'-\sin\theta)\mathrm{d}s+[\lambda\delta w]_0^L+EIc\int_0^L\theta^{(4)}\delta\theta\mathrm{d}s-\int_0^L\lambda\cos\theta\delta\theta\mathrm{d}s-\\&\left[\frac{1}{2}EIc\theta'\delta\theta''\right]_0^L+\left[\frac{1}{2}EIc\theta''\delta\theta'\right]_0^L-[EIc\theta'''\delta\theta]_0^L.\end{aligned} \tag{10}$$

根据最小势能原理,则总势能变分的驻值为零,故有 $\delta\Pi=0$。对式(10)进行合并同类项,并利用固有边界条件(6),以及考虑到变分的任意性,可以得到:

$$\lambda=P, \tag{11}$$

$$c\theta^{(4)}-\theta''-\frac{\lambda}{EI}\cos\theta=0, \tag{12}$$

$$\theta'(L)-c\theta'''(L)=0, \tag{13}$$

$$\theta''(L)\delta\theta'(L)-\theta''(0)\delta\theta'(0)-\theta'(L)\delta\theta''(L)+\theta'(0)\delta\theta''(0)=0. \tag{14}$$

式(11)表明 Lagrange 乘子经过识别后,其物理含义为自由端处的集中力。而方程(14)的表达式需要进一步化简才能便于求解。Aifantis[16] 的研究表明,考虑梯度效应的梁理论,其边界条件往往无法自洽。必须结合实际的物理意义对式(14)进行必要的化简。由所述问题的物理背景可知,在固定端处梁的曲率不为零,即 $\theta(0)\neq0$,故其变分 $\delta\theta'(0)$ 不能保证始终为零。而数值 $\theta''-c\theta^{(4)}$ 代表任意一点处的剪力,经式(12)的内力分析可知,在自由端其值为有限值,即 $\theta''(L)-c\theta^{(4)}(L)=-\frac{P}{EI}\cos\theta(L)$。该式左端第二项为一高阶小量,故而其绝对值应小于 $\theta''(L)$,因此当 $\theta''(L)=0$ 时,此等式无法满足,则可知必然存在 $\theta''(L)\neq0$,而其变分 $\delta\theta''(L)$ 也不能保证始终为零。故对于式(14),考虑任意数值的 $\delta\theta'(0)$ 和 $\delta\theta''(L)$,要保证该等式始终为零,则必有 $\theta''(0)=0$ 和 $\theta'(L)=0$。根据式(13)可知,$\theta'''(L)=0$。

综上所述,纳米悬臂梁发生大位移时的常微分控制方程组可以写成封闭的边值问题(BVP):

$$\begin{cases}c\theta^{(4)}-\theta''-\dfrac{P}{EI}\cos\theta=0,\\x'=\cos\theta,\\w'=\sin\theta.\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\theta(0)=0,\ \theta'(L)=0,\\&\theta''(0)=0,\ \theta'''(L)=0,\\&x(0)=0,\ w(0)=0.\end{aligned} \tag{16}$$

当不考虑梯度效应,即 $c=0$ 时,上述边值问题(15)和(16)可以退化到经典梁发生大变形的情形,其主要控制方程为 $\theta''+\frac{P}{EI}\cos\theta=0$,其边界条件为 $\theta(0)=0,\theta'(L)=0,x(0)=0,w(0)=0$,此与经典文献中的结果一致。

2.2 小变形

当梁发生小变形时,其轴线上任意一点处的倾角均为小量,即 $\theta=w'\ll1$,故 $\cos\theta\approx1$,因此控制方程(15)可以退化成:

$$\begin{cases}cw^{(5)}-w'''-\dfrac{P}{EI}=0,\\\mathrm{d}x=\mathrm{d}s,\\w'=\sin\theta.\end{cases} \tag{17}$$

其边界条件变为 $w(0)=0,w'(0)=0,w''(L)=0,w'''(0)=0$。式(17)中第二式表明此时自变量为 x,即在小变形时,可以忽略梁变形前后构型的变化。

经过推导,考虑梯度效应的发生小变形的悬臂梁可以很方便地求得解析解[16]:

$$w=\frac{P}{EI}L^3\left(\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{6}-\beta^3\frac{\sinh[(1-\xi)/\beta]}{\cosh(1/\beta)}+\beta^3\tanh(1/\beta)-\beta^2\xi\right), \tag{18}$$

其中,$\xi=x/L,\beta=\sqrt{c}/L$。

而梁的转角也可以对挠度求导得到:

$$\theta=w'=\frac{P}{EI}L^2\left[\xi-\frac{1}{2}\xi^2+\beta^2\frac{\cosh[(1-\xi)/\beta]}{\cosh(1/\beta)}-\beta^2\right]. \tag{19}$$

3　结果及讨论

与小变形相比，对于发生大变形的悬臂梁，其挠度的解析求解非常困难。采用打靶法（shooting method），并在解微分方程时采用高阶的 Runge-Kutta 法进行迭代求解。对该问题进行打靶法求解的基本思路为：首先固定悬臂梁左端的边界，此时该问题转化为一初值问题（IVP），则可以直接进行求解。求得的结果在右侧边界处与已知的数值进行比较，如果在误差范围内则为该问题的真解。

基于此思路，借助于数值软件 MathCAD（试用版）编写了程序并对之进行求解。求解过程中梁发生大变形时的参数选为：$P/(EI)=2.5\times10^{-5}\ \mathrm{nm}^{-2}$，长度 $L=400$ nm。由文献[16]可知，参数$\sqrt{c}/L$ 一般在 0～1 取值，故本文中在计算时取梯度系数 c 在 0～0.16 μm^2 内的数值。经过计算，梁发生大变形和小变形时的挠曲线分别绘制于图 2。其中，梁的梯度系数 c 分别取 0、0.08 和 0.16 μm^2。图 2 中的曲线 1、2、3 代表梁发生小变形时的挠曲线，曲线 4、5、6 则代表梁发生大变形时的挠曲线。

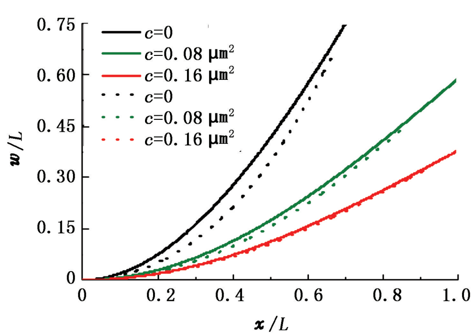

图 2　悬臂梁在不同梯度系数下发生大变形和小变形时的挠曲线

Fig. 2　Deflections of cantilever beam with different strain gradient coefficient

由图 2 可见，悬臂梁在发生大变形后，其水平方向上的位移 Δx 有明显的变化，而发生小变形时则变化不明显。这是由于经典的小变形假设忽略了梁发生变形前后构型的变化，故以 x 坐标为自变量就足够精确。同时也发现根据小变形理论预测出的梁的变形较大（曲线 1、2、3），而根据大变形理论预测的结果偏小（曲线 4、5、6），这与经典的大变形理论是一致的。另外，不同的弹性梯度系数对悬臂梁的挠曲线具有较大影响。弹性梯度系数越大，悬臂梁自由端的挠度越小，其挠曲线变形越小；反之弹性梯度系数越小，其变形越明显。特别是当 $c=0$ 时，没有梯度效应，此时悬臂梁的变形最为明显。这说明梯度系数对于梁抵抗变形能力起到了强化作用。

根据上述计算结果可以进一步得到悬臂梁发生大变形和发生小变形时，其自由端最大挠度与梯度系数 c 之间的关系，如图 3 所示。由图 3 可见，当悬臂梁发生大变形时，其最大挠度与梯度系数的关系曲线不是一条直线，而是一条下凹的曲线，表现出很强的非线性。随着梯度系数的减小，该曲线的斜率逐渐增大；而当梯度系数增大到一定范围时，梯度效应对于梁的变形的影响逐渐减弱。当梁发生小变形时，梯度系数对于其变形的影响不如其对于梁发生大变形时的影响明显。这更说明在梁发生大变形时，采用应变梯度理论对其进行分析的必要性。为了便于工程设计，对梁发生大变形的曲线进行了三次多项式拟合，拟合度为 0.999 52，其表达式可以写为

$$\frac{w(L)}{L}=0.667\,07-3.746\,5c+15.982\,16c^2-35.426c^3. \tag{20}$$

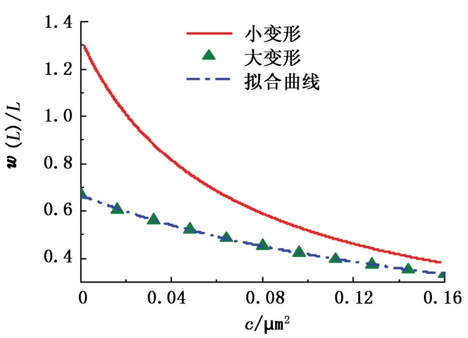

图 3　悬臂梁最大挠度与梯度系数的关系

Fig. 3　Relation between maximum deflection and gradient coefficient

根据式（18）得到梁发生小变形时自由端挠度的解析解：

$$\frac{w(L)}{L}=\frac{P}{EI}L^2\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{\sqrt{c}}{L}\right)^3\tanh\left(\frac{L}{\sqrt{c}}\right)-\frac{c}{L^2}\right). \tag{21}$$

二者之间的对比如图 3 所示，图 3 中曲线又一次显示了小变形理论的预测值比大变形理论的预测值偏大。

进一步得到自由端的转角与梯度系数 c 的关系曲线，如图 4 所示。根据式（19）可以得到梁发生小变形时其自由端转角的解析表达式：

$$\theta(L)=\frac{P}{EI}\left[\frac{L^2}{2}+\frac{c}{\cosh(L/\sqrt{c})}-c\right]. \tag{22}$$

由图 4 可见，弹性梯度系数对于悬臂梁自由端转角的影响规律与其对自由端挠度的影响规律类似，即函数曲线为非线性。同时当梯度系数逐渐增大时，转角函数逐渐趋近于某一常值。同样为了便于工程应用，可以对梁发生大变形时的转角曲线进行三次多项

式拟合,拟合度为 0.99974,其拟合表达式为

$$\theta(L)=1.12488-5.69283c+12.88905c^2-1.57401c^3. \tag{23}$$

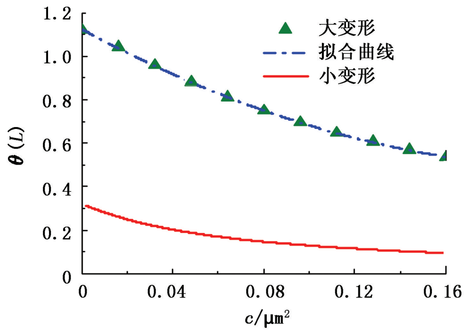

图 4 悬臂梁自由端转角与梯度系数的关系

Fig. 4 Relation between slope angle at the free end and the gradient coefficient

对比图 3、4,可以发现弹性梯度系数对于梁发生大变形时的影响比其发生小变形时的影响更大,故而在微纳米梁发生弹性大变形时,有必要考虑这一影响。

4 结 论

(1)在微纳米尺度下应变梯度对悬臂梁的变形有较大影响,随着应变梯度系数增加,梁的变形大幅减小。弹性梯度系数越大,悬臂梁自由端的挠度越小,其挠曲线变形越小;反之弹性梯度系数越小,其变形越大。当梯度系数增大到一定范围时,梯度效应对于梁的变形的影响逐渐减弱。

(2)弹性应变梯度系数对于梁发生大变形比发生小变形时的影响更为明显。弹性梯度系数对于微纳米梁的变形会起到抑制作用。在微纳米梁发生大变形时,应变梯度的影响更加值得考虑。

(3)小变形理论预测出的梁的变形较大,大变形理论预测的结果偏小,随着梯度系数增大,大变形理论和小变形理论预测的结果吻合很好。

参考文献:

[1] FLECK N A, MULLER G M, ASHBY M F, et al. Strain gradient plasticity: theory and experiment [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1994,42(2):475-487.

[2] STÖLKEN J S, EVANS A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale [J]. Acta Materialia, 1998,46(14):5109-5115.

[3] NIX W D. Mechanical properties of thin films [J]. Metallurgical Transactions A, 1989,20(11):2217-2245.

[4] STELMASHENKO N A, WALLS M G, BROWN L M, et al. Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1993,41(10):2855-2865.

[5] MA Q, CLARKE D R. Size dependent hardness of silver single crystals [J]. Journal of Materials Research, 1995, 10(4):853-863.

[6] POOLE W J, ASHBY M F, FLECK N A. Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals [J]. Scripta Materialia, 1996,34(4):559-564.

[7] MCELHANEY K W, VLASSAK J J, NIX W D. Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiments [J]. Journal of Materials Research, 1998,13(5):1300-1306.

[8] AIFANTIS E C. On the microstructural origin of certain inelastic models [J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1984,106(4):326-330.

[9] ZBIB H M, AIFANTIS E C. On the localization and post-localization behavior of plastic deformation I: on the initiation of shear bands, II: on the evolution and thickness of shear bands, III: on the structure and velocity of the Portevin-Le chatelier bands [J]. Res Mechanica, 1988, 23(2/3):261-277,279-305.

[10] MÜHLHAUS H B, ALFANTIS E C. A variational principle for gradient plasticity [J]. International Journal of Solids and Structures, 1991,28(7):845-857.

[11] FLECK N A, HUTCHINSON J W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1993,41(12): 1825-1857.

[12] FLECK N A, HUTCHINSON J W. Strain gradient plasticity:advances in applied mechanics[J]. JW Hutchinson and TY Wu, 1997,33:295-361.

[13] GAO H, HUANG Y, NIX W D, et al. Mechanism-based strain gradient plasticity-Ⅰ: theory[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1999,47(6): 1239-1263.

[14] HUANG Y, GAO H, NIX W D, et al. Mechanism-based strain gradient plasticity-Ⅱ:analysis[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000,48(1): 99-128.

[15] CHEN S H, YAO Y. Elastic theory of nanomaterials based on surface-energy density[J]. ASME Journal of Applied Mechanics,2014,81(12):121002.

[16] AIFANTIS E C. Exploring the applicability of gradient elasticity to certain micro/nano reliability problems[J]. Microsystem Technologies, 2009,15(1):109-115.

(编辑 沈玉英)