

用柱状成层各向异性介质的并矢 Green 函数模拟 多分量感应测井仪器的响应

魏宝君^{1,2}, 王成园¹, 党峰³, 常欣莉¹, 曹景强¹

(1. 中国石油大学理学院, 山东青岛 266580; 2. 中国石油大学山东省高校新能源物理与材料科学
重点实验室, 山东青岛 266580; 3. 中国石油集团测井有限公司, 陕西西安 710077)

摘要:采用递推方法得到柱状成层各向异性介质(横向各向同性)中并矢 Green 函数的解析表达式。该表达式可用于模拟柱状成层各向异性地层中任意点源(包括电流源和磁流源)的响应,地层数目可以任意,源点和场点的位置可以在任意地层中。利用上述表达式模拟含金属心轴和绝缘保护层多分量感应测井仪器在有井眼和侵入带各向异性地层中的响应。为提高模拟精度,考虑各分量线圈系的具体形状。将金属心轴作为一层介质处理,既可以考虑其电导率有限,也可以考虑其电导率为无穷大的情况。数值模拟结果表明,共面线圈系具有与共轴线圈系完全不同的响应特性。共面线圈系的响应特性更为复杂,对钻井液电导率、侵入带电导率、地层电导率、地层各向异性的变化更为敏感,且在很多情况下其响应会随这些参数的变化出现符号改变。此外,由于共面线圈系的同一响应可对应各向同性地层或各向异性地层的不同电导率,从而使得对测量数据的解释处理变得复杂。

关键词:多分量感应测井; 并矢 Green 函数; 柱状成层各向异性介质; 金属心轴; 侵入带

中图分类号:P 631.9 **文献标志码:**A

引用格式:魏宝君, 王成园, 党峰, 等. 用柱状成层各向异性介质的并矢 Green 函数模拟多分量感应测井仪器的响应[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2016, 40(2): 59-69.

WEI Baojun, WANG Chengyuan, DANG Feng, et al. Simulating responses of multi-component induction logging tools by dyadic Green's functions in cylindrically stratified anisotropic media[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2016, 40(2): 59-69.

Simulating responses of multi-component induction logging tools by dyadic Green's functions in cylindrically stratified anisotropic media

WEI Baojun^{1,2}, WANG Chengyuan¹, DANG Feng³, CHANG Xinli¹, CAO Jingqiang¹

(1. College of Science in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China;

2. Key Laboratory of New Energy Physics & Material Science in Universities of Shandong, China University of Petroleum,
Qingdao 266580, China;

3. China Petroleum Logging Company Limited, Xi'an 710077, China)

Abstract: An analytical expression of dyadic Green's functions in cylindrically stratified anisotropic media (transversely isotropic media) was obtained using a recursive method. The expression can be used to simulate the response of an arbitrary point source (including electric source and magnetic source) in cylindrically stratified anisotropic formations. The expression can be applied to any number of formation layers, and with the source location and field location in any of the layers. Using the method, the responses of multi-component induction logging tools with a metal mandrel and an insulating protection layer were simulated in anisotropic formations with a borehole and an invasion zone. The shape of each component's coils was taken

收稿日期:2015-05-20

基金项目:国家科技重大专项(2016ZX05019007);中央高校基本科研业务费专项资金(15CX05047A);中国石油天然气集团公司科学研究
与技术开发项目(2014D-4018)

作者简介:魏宝君(1969-),男,教授,博士,教育部“新世纪优秀人才支持计划”入选者,研究方向为电磁测井理论及应用。E-mail: weibj@upc.edu.cn。

into account in order to increase the simulating precision, and the metal mandrel was taken as a layer whose conductivity can be both finite and infinite. The simulation results show that the response of coplanar coil system has entirely different characteristics from that of coaxial coil system; the response of coplanar coil system is often more complex and more sensitive to the change in drilling liquid conductivity, invasion zone's conductivity, formation conductivity, and formation anisotropy. These parameters may even cause sign flip in the response under many conditions. Furthermore, since the same response of coplanar coil system may be produced by entirely different formation conductivities in isotropic or anisotropic formations, it will become much complicated to interpret or process the measured data.

Keywords: multi-component induction logging; dyadic Green's functions; cylindrically stratified anisotropic media; metal mandrel; invasion zone

感应测井是一种重要的井中电阻率测量技术。传统的感应测井仪器一般采用一组或多组共轴发射-接收线圈阵列,只能提供井眼周围的横向电导率信息。然而,一些实际地层如砂-泥岩薄交互层的宏观电参数是各向异性的,即横向电导率和垂向电导率不同,从而形成横向各向同性(TI)地层^[1]。传统感应测井仪器所获得的测量数据并不能反映井眼周围这类地层的真实特性,给地层的精确评价带来误差。多分量感应测井仪器由一组或多组沿3个方向彼此垂直的发射-接收线圈阵列组成,可同时测量感应电动势的9个分量,从而能探测到各向异性地层的横向电导率和垂向电导率信息,对复杂地层的高精度对比评价具有重要意义^[2-3]。井眼、侵入、地层各向异性、仪器结构等因素对多分量感应测井响应均产生影响^[1-3],系统地分析这些因素的影响规律对测量数据的解释处理具有重要价值。由于有限差分和有限元等数值模拟方法在分析此类问题时效率低、速度慢^[4],因而选取合适的、能存在解析解的模型并采用高效的解析方法进行模拟是最佳选择。事实上,在分析井眼中各类电磁测井仪器的响应特性、分析仪器在柱状成层或水平成层地层中的响应特性、模拟仪器的刻度时多采用解析方法^[4-14]。笔者基于圆柱坐标系下均匀各向异性介质中并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式,采用递推方法^[6]得到柱状成层各向异性介质中并矢 Green 函数的解析表达式,在推导过程中将金属心轴作为一层介质处理,既可以考虑其电导率有限,也可以考虑其电导率为无穷大的情况。利用上述表达式模拟分析钻井液电导率、侵入带电导率、地层电导率、地层各向异性等因素对含金属心轴和绝缘保护层多分量感应测井仪器响应的具体形状。

1 基本理论

1.1 均匀各向异性介质中谱域电磁场纵向向量与横向向量之间的关系

采用圆柱坐标系并假设发射源随时间的变化关

系为 $\exp(-i\omega t)$, 其中 ω 为角频率。在圆柱坐标系中, $\nabla = \nabla_s + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, 其中 $\nabla_s = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$, 并令 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{e}_z E_z$ 、 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{e}_z H_z$, 则在无源区域中由 Maxwell 方程组得

$$\left(\nabla_s + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{E}_s + \mathbf{e}_z E_z) = i\omega\mu (\mathbf{H}_s + \mathbf{e}_z H_z), \quad (1)$$

$$\left(\nabla_s + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{H}_s + \mathbf{e}_z H_z) = -i\omega\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{E}_s + \mathbf{e}_z E_z). \quad (2)$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}(\varepsilon_h, \varepsilon_h, \varepsilon_v).$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为横向各向同性(TI)地层介电常数张量, ε_h 和 ε_v 分别为其水平和垂直分量。将式(1)和(2)展开并考虑到等式两侧场的纵向分量和横向分量分别相等,经推导可将电磁场的横向分量用纵向分量表示为

$$\left(k_h^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}_s = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_s E_z - i\omega\mu \mathbf{e}_z \times \nabla_s H_z, \quad (3)$$

$$\left(k_h^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{H}_s = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_s H_z + i\omega\varepsilon_h \mathbf{e}_z \times \nabla_s E_z. \quad (4)$$

其中

$$k_h^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_h.$$

考虑到频率域电磁场均可表示为谱域电磁场积分的形式^[15],即

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp[ik_z(z-z')] \cdot \exp[i\nu(\phi-\phi')] \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\nu \\ \mathbf{h}_\nu \end{pmatrix}, \quad (5)$$

在式(3)和(4)中, $\frac{\partial}{\partial z} = ik_z$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k_z^2$, $k_h^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = k_h^2 - k_z^2 =$

k_{hp}^2 , $\nabla_s = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{i\nu}{\rho}$ 。于是在谱域内有

$$\begin{pmatrix} e_{\phi\nu} \\ h_{\phi\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{k_{hp}^2} \begin{pmatrix} -\frac{\nu k_z}{\rho} & -i\omega\mu \frac{d}{d\rho} \\ i\omega\varepsilon_h \frac{d}{d\rho} & -\frac{\nu k_z}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{z\nu} \\ h_{z\nu} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} e_{\rho\nu} \\ h_{\rho\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{k_{\text{lp}}^2} \begin{pmatrix} ik_z \frac{d}{d\rho} & -\frac{\omega\mu\nu}{\rho} \\ \frac{\omega\varepsilon_h\nu}{\rho} & ik_z \frac{d}{d\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{z\nu} \\ h_{z\nu} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

即均匀各向异性介质中谱域内电磁场的横向分量可用纵向分量表示。

1.2 均匀各向异性介质中谱域磁流源并矢 Green 函数

假设 $\rho > \rho'$, 对比均匀各向同性介质中谱域磁流源并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式的各分量^[16], 考虑到沿 z 方向单位磁偶极子源只产生 TE 波, 其 z 分量为

$$g_{\nu,zz}^{\text{EM,h}} = 0, \quad (8)$$

$$g_{\nu,zz}^{\text{HM,h}} = \frac{i}{8\pi} k_{\text{lp}}^2 J_\nu(k_{\text{lp}}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho). \quad (9)$$

沿 ρ 方向单位磁偶极子源既产生 TE 波, 又产生 TM 波, 其 z 分量为

$$g_{\nu,z\rho}^{\text{EM,h}} = \frac{i\omega\mu\nu}{8\pi\rho} J_\nu(k_{\nu\rho}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho), \quad (10)$$

$$g_{\nu,z\rho}^{\text{HM,h}} = \frac{k_{\text{lp}} k_z}{8\pi} J'_\nu(k_{\text{lp}}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho). \quad (11)$$

其中

$$k_{\nu\rho} = k_{\text{lp}}/K, K = k_h/k_\nu, k_\nu^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_\nu.$$

式中, K 为各向异性系数。

沿 ϕ 方向单位磁偶极子源既产生 TE 波, 又产生 TM 波, 其 z 分量为

$$g_{\nu,z\phi}^{\text{EM,h}} = \frac{\omega\mu k_{\nu\rho}}{8\pi} J'_\nu(k_{\nu\rho}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho), \quad (12)$$

$$g_{\nu,z\phi}^{\text{HM,h}} = -\frac{i\nu k_z}{8\pi\rho} J_\nu(k_{\text{lp}}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho). \quad (13)$$

考虑到式(6)、(7), 定义如下矩阵:

$$\mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)}(k_\rho\rho) = \begin{pmatrix} H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho) & 0 \\ 0 & H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)}(k_\rho\rho) = \frac{1}{k_{\text{lp}}^2 \rho} \begin{pmatrix} -\nu k_z H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho) & -i\omega\mu k_{\text{lp}} \rho H'_\nu(k_{\text{lp}}\rho) \\ i\omega\varepsilon_h k_{\nu\rho} \rho H'_\nu(k_{\nu\rho}\rho) & -\nu k_z H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)}(k_\rho\rho) = \frac{1}{k_{\text{lp}}^2 \rho} \begin{pmatrix} ik_z k_{\nu\rho} \rho H'_\nu(k_{\nu\rho}\rho) & -\omega\mu\nu H_\nu(k_{\text{lp}}\rho) \\ \omega\varepsilon_h \nu H_\nu(k_{\nu\rho}\rho) & ik_z k_{\text{lp}} \rho H'_\nu(k_{\text{lp}}\rho) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

则在 $\rho > \rho'$ 时, 均匀各向异性介质中谱域磁流源并矢 Green 函数的所有分量可表示为

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,zz}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,zz}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,z}^{\text{M,h}}, \quad \begin{pmatrix} g_{\nu,\phi z}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,\phi z}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{\text{M,h}},$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\rho z}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,\rho z}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{\text{M,h}}. \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,z\phi}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,z\phi}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{\text{M,h}}, \quad \begin{pmatrix} g_{\nu,\phi\phi}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,\phi\phi}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{\text{M,h}},$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\rho\phi}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,\rho\phi}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{\text{M,h}}. \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,z\rho}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,z\rho}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{\text{M,h}}, \quad \begin{pmatrix} g_{\nu,\phi\rho}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,\phi\rho}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{\text{M,h}},$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\rho\rho}^{\text{EM,h}} \\ g_{\nu,\rho\rho}^{\text{HM,h}} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{\text{M,h}}. \quad (19)$$

式中, 系数 $\mathbf{a}_{\nu,z}^{\text{M,h}}$ 、 $\mathbf{a}_{\nu,\phi}^{\text{M,h}}$ 、 $\mathbf{a}_{\nu,\rho}^{\text{M,h}}$ 可分别由式(8)~(13)得到。

若 $\rho < \rho'$, 只需将上述各表达式中的 $J_\nu(k_{\text{lp}}\rho')$ 换成 $H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho')$, $J_\nu(k_{\nu\rho}\rho')$ 换成 $H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho')$, $H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho)$ 换成 $J_\nu(k_{\text{lp}}\rho)$, $H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho)$ 换成 $J_\nu(k_{\nu\rho}\rho)$ 即可。相应地, 式(14)~(16)中相关矩阵定义为 $\mathbf{J}_{\nu,z}(k_\rho\rho)$ 、 $\mathbf{J}_{\nu,\phi}(k_\rho\rho)$ 和 $\mathbf{J}_{\nu,\rho}(k_\rho\rho)$, 式(17)~(19)中的相关系数定义为 $\mathbf{b}_{\nu,z}^{\text{M,h}}$ 、 $\mathbf{b}_{\nu,\phi}^{\text{M,h}}$ 和 $\mathbf{b}_{\nu,\rho}^{\text{M,h}}$ 。

1.3 均匀各向异性介质中谱域电流源并矢 Green 函数

当 $\rho > \rho'$ 时, 对比均匀各向同性介质中谱域电流源并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式的各分量^[16], 考虑到沿 z 方向的单位电偶极子源只产生 TM 波, 其 z 分量为

$$g_{\nu,zz}^{\text{EJ,h}} = -\frac{\omega\mu k_{\nu\rho}^2}{8\pi k_\nu^2} J_\nu(k_{\nu\rho}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho), \quad (20)$$

$$g_{\nu,zz}^{\text{HJ,h}} = 0. \quad (21)$$

沿 ρ 方向单位电偶极子源既产生 TE 波, 又产生 TM 波, 其 z 分量为

$$g_{\nu,z\rho}^{\text{EJ,h}} = \frac{i\omega\mu k_z k_{\nu\rho}}{8\pi k_h^2} J'_\nu(k_{\nu\rho}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho), \quad (22)$$

$$g_{\nu,z\rho}^{\text{HJ,h}} = \frac{\nu}{8\pi\rho} J_\nu(k_{\text{lp}}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho). \quad (23)$$

沿 ϕ 方向单位电偶极子源既产生 TE 波, 又产生 TM 波, 其 z 分量为

$$g_{\nu,z\phi}^{\text{EJ,h}} = \frac{\omega\mu k_z \nu}{8\pi k_h^2 \rho} J_\nu(k_{\nu\rho}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho), \quad (24)$$

$$g_{\nu,z\phi}^{\text{HJ,h}} = -\frac{ik_{\text{lp}}}{8\pi} J'_\nu(k_{\text{lp}}\rho') H_\nu^{(1)}(k_{\text{lp}}\rho). \quad (25)$$

考虑到式(6)、(7), 则在 $\rho > \rho'$ 时, 均匀各向异性介质中谱域电流源并矢 Green 函数的所有分量可表示为

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,z}^{EJ,h} \\ g_{\nu,z}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,z}^{J,h}, \begin{pmatrix} g_{\nu,\phi z}^{EJ,h} \\ g_{\nu,\phi z}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,z}^{J,h},$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\rho z}^{EJ,h} \\ g_{\nu,\rho z}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,z}^{J,h}, \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,z\phi}^{EJ,h} \\ g_{\nu,z\phi}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{J,h},$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\phi\phi}^{EJ,h} \\ g_{\nu,\phi\phi}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{J,h}, \begin{pmatrix} g_{\nu,\rho\phi}^{EJ,h} \\ g_{\nu,\rho\phi}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{J,h}. \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\varphi\rho}^{EJ,h} \\ g_{\nu,\varphi\rho}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{J,h}, \begin{pmatrix} g_{\nu,\phi\rho}^{EJ,h} \\ g_{\nu,\phi\rho}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{J,h},$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\rho\rho}^{EJ,h} \\ g_{\nu,\rho\rho}^{HJ,h} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{J,h}. \quad (28)$$

式中,系数 $\mathbf{a}_{\nu,z}^{J,h}$ 、 $\mathbf{a}_{\nu,\phi}^{J,h}$ 、 $\mathbf{a}_{\nu,\rho}^{J,h}$ 可分别由式(20)~(25)得到。若 $\rho < \rho'$, 只需将上述各表达式中的 $J_\nu(k_{\rho}\rho')$ 换成 $H_\nu^{(1)}(k_{\rho}\rho')$, $J_\nu(k_{\nu\rho}\rho')$ 换成 $H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho')$, $H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho)$ 换成 $J_\nu(k_{\nu\rho}\rho)$, $H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho}\rho)$ 换成 $J_\nu(k_{\nu\rho}\rho)$ 即可。相应地,式(26)~(28)中的相关系数定义为 $\mathbf{b}_{\nu,z}^{J,h}$ 、 $\mathbf{b}_{\nu,\phi}^{J,h}$ 和 $\mathbf{b}_{\nu,\rho}^{J,h}$ 。

在谱域内无论是电流源还是磁流源,其沿不同方向的单位源在所有3个正交方向产生的电磁场(即并矢 Green 函数)的表达式可以统一表示为如下形式:

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,z}^{E,h} \\ g_{\nu,z}^{H,h} \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{J}_{\nu,z}(k_\rho\rho) \cdot \mathbf{b}_\nu^h, \rho \leq \rho', \\ \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot \mathbf{a}_\nu^h, \rho > \rho', \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\phi}^{E,h} \\ g_{\nu,\phi}^{H,h} \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{J}_{\nu,\phi}(k_\rho\rho) \cdot \mathbf{b}_\nu^h, \rho \leq \rho', \\ \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot \mathbf{a}_\nu^h, \rho > \rho', \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu,\rho}^{E,h} \\ g_{\nu,\rho}^{H,h} \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{J}_{\nu,\rho}(k_\rho\rho) \cdot \mathbf{b}_\nu^h, \rho \leq \rho', \\ \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot \mathbf{a}_\nu^h, \rho > \rho'. \end{cases} \quad (31)$$

式中, \mathbf{a}_ν^h 、 \mathbf{b}_ν^h 根据不同类型和方向的源具有其不同的具体表达式。

结合式(5),频率域内不同类型和尺寸的源产生的电磁场可表示为

$$\begin{pmatrix} E_z^h \\ H_z^h \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{\nu'=-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) \exp(i\nu\phi) \cdot$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\nu,z}(k_\rho\rho) \cdot \tilde{\mathbf{b}}_\nu^h, \rho \leq \rho', \\ \mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot \tilde{\mathbf{a}}_\nu^h, \rho > \rho', \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} E_\phi^h \\ H_\phi^h \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{\nu'=-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) \exp(i\nu\phi) \cdot$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\nu,\phi}(k_\rho\rho) \cdot \tilde{\mathbf{b}}_\nu^h, \rho \leq \rho', \\ \mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot \tilde{\mathbf{a}}_\nu^h, \rho > \rho', \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{pmatrix} E_\rho^h \\ H_\rho^h \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{\nu'=-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) \exp(i\nu\phi) \cdot \begin{cases} \mathbf{J}_{\nu,\rho}(k_\rho\rho) \cdot \tilde{\mathbf{b}}_\nu^h, \rho \leq \rho', \\ \mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)}(k_\rho\rho) \cdot \tilde{\mathbf{a}}_\nu^h, \rho > \rho'. \end{cases} \quad (34)$$

其中, $\tilde{\mathbf{a}}_\nu^h$ 、 $\tilde{\mathbf{b}}_\nu^h$ 已经考虑到不同类型和方向的发射线圈的形状和尺寸,是对发射源的空间积分。

1.4 柱状成层各向异性介质中谱域并矢 Green 函数

对于沿 ρ 方向柱状成多层介质(图1),设介质从里向外编号为 $-m, -m+1, \dots, 0, 1, \dots, n$, 半径分别

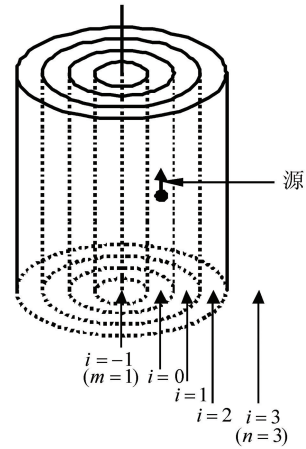


图1 柱状成层各向异性介质模型

Fig.1 Model of cylindrically stratified anisotropic media

为 $\rho_{-m}, \rho_{-m+1}, \dots, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, 源在第0层, 类比式(29)~(31)可写出任意第 i 层介质中谱域并矢 Green 函数的 z 分量、 ϕ 分量和 ρ 分量,

$$\begin{pmatrix} g_{\nu z,i}^E \\ g_{\nu z,i}^H \end{pmatrix} = \begin{cases} [\mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)}(k_\rho,i\rho) \mathbf{M}_{i\nu} + \mathbf{J}_{\nu,z}(k_\rho,i\rho) \mathbf{I}] \mathbf{b}_{i\nu}, \rho \leq \rho', \\ [\mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)}(k_\rho,i\rho) \mathbf{I} + \mathbf{J}_{\nu,z}(k_\rho,i\rho) \mathbf{N}_{i\nu}] \mathbf{a}_{i\nu}, \rho > \rho', \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu\phi,i}^E \\ g_{\nu\phi,i}^H \end{pmatrix} = \begin{cases} [\mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)}(k_\rho,i\rho) \mathbf{M}_{i\nu} + \mathbf{J}_{\nu,\phi}(k_\rho,i\rho) \mathbf{I}] \mathbf{b}_{i\nu}, \rho \leq \rho', \\ [\mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)}(k_\rho,i\rho) \mathbf{I} + \mathbf{J}_{\nu,\phi}(k_\rho,i\rho) \mathbf{N}_{i\nu}] \mathbf{a}_{i\nu}, \rho > \rho', \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{pmatrix} g_{\nu\rho,i}^E \\ g_{\nu\rho,i}^H \end{pmatrix} = \begin{cases} [\mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)}(k_\rho,i\rho) \mathbf{M}_{i\nu} + \mathbf{J}_{\nu,\rho}(k_\rho,i\rho) \mathbf{I}] \mathbf{b}_{i\nu}, \rho \leq \rho', \\ [\mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)}(k_\rho,i\rho) \mathbf{I} + \mathbf{J}_{\nu,\rho}(k_\rho,i\rho) \mathbf{N}_{i\nu}] \mathbf{a}_{i\nu}, \rho > \rho'. \end{cases} \quad (37)$$

式中, $k_{\rho,i}$ 可表示 $k_{\nu\rho,i}$ 和 $k_{\nu\rho,i}$, 参见式(14)~(16), $k_{\nu\rho,i}^2 = k_{hi}^2 - k_z^2$, $k_{hi}^2 = \omega^2 \mu_i \varepsilon_{hi}$, $k_{\nu\rho,i} = k_{\nu\rho,i} / K_i$, $K_i = k_{hi} / k_{vi}$ 为每层介质各向异性系数, $k_{\nu,i}^2 = \omega^2 \mu_i \varepsilon_{vi}$ 。 $\mathbf{M}_{i\nu}$ 和 $\mathbf{N}_{i\nu}$ 分别是内层界面和外层界面的 2×2 阶广义反射矩阵, 满足 $\mathbf{M}_{-m,\nu} = 0, \mathbf{N}_{n,\nu} = 0$ 。式(35)~(37)可适用于不同类型和方向的源, 只是对于不同情况列向量 $\mathbf{a}_{i\nu}$ 、 $\mathbf{b}_{i\nu}$ 具体表达式不同。为获得任意层中的并矢 Green 函数, 需针

对所有 i 和 ν 确定矩阵 $M_{i\nu}$ 、 $N_{i\nu}$ 和列向量 $a_{i\nu}$ 、 $b_{i\nu}$ 。

参考文献[6]给出确定 $M_{i\nu}$ 、 $N_{i\nu}$ 、 $a_{i\nu}$ 、 $b_{i\nu}$ 的方法。在界面 ρ_i 处定义局域反射系数矩阵 $\Gamma_{i\nu}^-$ 、 $\Gamma_{i\nu}^+$ 和局域透射系数矩阵 $T_{i\nu}^-$ 、 $T_{i\nu}^+$ 。

假设有一幅度为 a_ν 的电磁波从第 $i+1$ 层介质向里入射到界面 ρ_i 上,该波在 ρ_i 处被反射和透射。根据电磁场 z 分量和 ϕ 分量的连续性条件,有

$$\begin{aligned} [J_{\nu,z}(k_{\rho,i+1}\rho_i) + H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i)\Gamma_{i\nu}^-]a_\nu &= J_{\nu,z}(k_{\rho,i}\rho_i)T_{i\nu}^-a_\nu, \\ [J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i+1}\rho_i) + H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i)\Gamma_{i\nu}^-]a_\nu &= J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho_i)T_{i\nu}^-a_\nu. \end{aligned}$$

将上述两式联立,先消去 $T_{i\nu}^-$,经整理得到

$$\begin{aligned} A_{i\nu} \cdot \Gamma_{i\nu}^- &= J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i+1}\rho_i) - \\ & J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho_i)J_{\nu,z}^{-1}(k_{\rho,i}\rho_i)J_{\nu,z}(k_{\rho,i+1}\rho_i), \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{i\nu} &= J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho_i)J_{\nu,z}^{-1}(k_{\rho,i}\rho_i)H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i) - \\ & H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i). \end{aligned} \quad (39)$$

再消去 $\Gamma_{i\nu}^-$,经整理得到

$$\begin{aligned} B_{i\nu} \cdot T_{i\nu}^- &= H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i)H_{\nu,z}^{(1),-1}(k_{\rho,i+1}\rho_i)J_{\nu,z}(k_{\rho,i+1}\rho_i) - \\ & J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i+1}\rho_i), \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} B_{i\nu} &= H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i)H_{\nu,z}^{(1),-1}(k_{\rho,i+1}\rho_i)J_{\nu,z}(k_{\rho,i}\rho_i) - \\ & J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho_i). \end{aligned} \quad (41)$$

再假设有一幅度为 a_ν 的电磁波从第 i 层介质向外入射到界面 ρ_i 上,该波在 ρ_i 处被反射和透射。根据电磁场 z 分量和 ϕ 分量的连续性条件,有

$$\begin{aligned} [H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho_i) + J_{\nu,z}(k_{\rho,i}\rho_i)\Gamma_{i\nu}^+]a_\nu &= \\ & H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i)T_{i\nu}^+a_\nu, \\ [H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho_i) + J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho_i)\Gamma_{i\nu}^+]a_\nu &= \\ & H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i)T_{i\nu}^+a_\nu. \end{aligned}$$

将上述两式联立,先消去 $T_{i\nu}^+$,经整理得到

$$\begin{aligned} B_{i\nu}\Gamma_{i\nu}^+ &= H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho_i) - \\ & H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i+1}\rho_i)H_{\nu,z}^{(1),-1}(k_{\rho,i+1}\rho_i)H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho_i). \end{aligned} \quad (42)$$

再消去 $\Gamma_{i\nu}^+$,经整理得到

$$\begin{aligned} A_{i\nu} \cdot T_{i\nu}^+ &= J_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho_i)J_{\nu,z}^{-1}(k_{\rho,i}\rho_i)H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho_i) - \\ & H_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho_i). \end{aligned} \quad (43)$$

利用下列递推公式可得到源内侧 $i \leq 0$ 所有层的 $M_{i\nu}$ [6]:

$$M_{i+1,\nu} = \Gamma_{i\nu}^- + T_{i\nu}^+ M_{i\nu} [I - \Gamma_{i\nu}^+ M_{i\nu}]^{-1} T_{i\nu}^-, \quad i = -m, -m+1, \dots, -1. \quad (44)$$

利用式(44)从 $M_{-m,\nu} = 0$ 开始递推,一直到 $M_{0,\nu}$ 。

特别地,若最内层介质为理想导体,为满足在 $\rho = \rho_{-m}$ 处电场 z 分量和 ϕ 分量为 0,由式(35)、(36)得

$$M_{-m+1,\nu} = \Gamma_{\nu} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{J_\nu(k_{\nu\rho,-m+1}\rho_{-m})}{H_\nu^{(1)}(k_{\nu\rho,-m+1}\rho_{-m})} & 0 \\ 0 & \frac{J'_\nu(k_{\nu\rho,-m+1}\rho_{-m})}{H_\nu'^{(1)}(k_{\nu\rho,-m+1}\rho_{-m})} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

递推时从 $M_{-m+1,\nu}$ 开始,一直到 $M_{0,\nu}$ 。

利用下列递推公式可得到源外侧 $i > 0$ 所有层的 $N_{i\nu}$ [6]:

$$N_{i\nu} = \Gamma_{i\nu}^+ + T_{i\nu}^- N_{i+1,\nu} [I - \Gamma_{i\nu}^- N_{i+1,\nu}]^{-1} T_{i\nu}^+, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1, 0. \quad (46)$$

利用式(46)从 $N_{n\nu} = 0$ 开始递推,一直到 $N_{0\nu}$ 。

尚有列向量 $a_{i\nu}$ 、 $b_{i\nu}$ 需要确定。在第 0 层,根据式(35)有

$$\begin{pmatrix} g_{\nu z,0}^E \\ g_{\nu z,0}^H \end{pmatrix} = \begin{cases} [H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,0}\rho)M_{0\nu} + J_{\nu,z}(k_{\rho,0}\rho)I]b_{0\nu}, & \rho \leq \rho', \\ [H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,0}\rho)I + J_{\nu,z}(k_{\rho,0}\rho)N_{0\nu}]a_{0\nu}, & \rho > \rho'. \end{cases} \quad (47)$$

另外两个分量可类比式(36)、(37)写出。在源 $\rho = \rho_T^-$ 和 $\rho = \rho_T^+$ 处 z 分量满足场的阶跃变化条件,结合式(29)和(47)有

$$\begin{aligned} [H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,0}\rho_T)I + J_{\nu,z}(k_{\rho,0}\rho_T)N_{0\nu}]a_{0\nu} - \\ [H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,0}\rho_T)M_{0\nu} + J_{\nu,z}(k_{\rho,0}\rho_T)I]b_{0\nu} = \\ H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,0}\rho_T)a_{0\nu}^h - J_{\nu,z}(k_{\rho,0}\rho_T)b_{0\nu}^h. \end{aligned}$$

式中, $a_{0\nu}^h$ 和 $b_{0\nu}^h$ 由式(14)的 a_ν^h 和 b_ν^h 取第 0 层介质的参数得到。于是有

$$\begin{aligned} J_{\nu,z}(k_{\rho,0}\rho_T)[N_{0\nu}a_{0\nu} - Ib_{0\nu}] &= -J_{\nu,z}(k_{\rho,0}\rho_T)b_{0\nu}^h, \\ H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,0}\rho_T)[Ia_{0\nu} - M_{0\nu}b_{0\nu}] &= H_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,0}\rho_T)a_{0\nu}^h. \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} N_{0\nu} & -I \\ I & -M_{0\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0\nu} \\ b_{0\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{0\nu}^h \\ a_{0\nu}^h \end{pmatrix}. \quad (48)$$

利用式(48)可确定列向量 $a_{0\nu}$ 、 $b_{0\nu}$,若利用 ϕ 分量或 ρ 分量所满足的场的阶跃变化条件可得到与式(48)完全相同的形式。确定列向量 $a_{i+1,\nu}$ 、 $b_{i\nu}$ 可由下式递推[6]:

$$b_{i\nu} = [I - \Gamma_{i\nu}^+ M_{i\nu}]^{-1} T_{i\nu}^- b_{i+1,\nu}, \quad i = -1, \dots, -m. \quad (49)$$

$$a_{i+1,\nu} = [I - \Gamma_{i\nu}^- N_{i+1,\nu}]^{-1} T_{i\nu}^+ a_{i\nu}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (50)$$

为获得任意层中的谱域并矢 Green 函数,先利用式(38)、(40)、(42)、(43)计算每层的局域反射系数矩阵和局域透射系数矩阵 $\Gamma_{i\nu}^-$ 、 $T_{i\nu}^-$ 、 $\Gamma_{i\nu}^+$ 、 $T_{i\nu}^+$;再利用式(44)从 $M_{-m,\nu} = 0$ 开始递推一直递推到 $M_{0,\nu}$,利用式(46)从 $N_{n\nu} = 0$ 开始递推一直递推到 $N_{0\nu}$;再利用式(48)确定列向量 $a_{0\nu}$ 、 $b_{0\nu}$,并由式(49)、(50)确定出所有的 $a_{i\nu}$ 、 $b_{i\nu}$;最后由式(35)~(37)得到任意第 i 层介质中谱域并矢 Green 函数的 z 分量、 ϕ 分量和 ρ 分量。

由式(35)~(37)并结合式(5),任意第*i*层介质中频率域内不同类型和尺寸的源产生的电磁场可表示为

$$\begin{pmatrix} E_{z,i} \\ H_{z,i} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) \exp(i\nu\phi) \cdot \begin{cases} [\mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{M}_{i\nu} + \mathbf{J}_{\nu,z}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{I}] \tilde{\mathbf{b}}_{i\nu}, \rho \leq \rho', \\ [\mathbf{H}_{\nu,z}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{I} + \mathbf{J}_{\nu,z}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{N}_{i\nu}] \tilde{\mathbf{a}}_{i\nu}, \rho > \rho'. \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{pmatrix} E_{\phi,i} \\ H_{\phi,i} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) \exp(i\nu\phi) \cdot \begin{cases} [\mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{M}_{i\nu} + \mathbf{J}_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{I}] \tilde{\mathbf{b}}_{i\nu}, \rho \leq \rho', \\ [\mathbf{H}_{\nu,\phi}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{I} + \mathbf{J}_{\nu,\phi}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{N}_{i\nu}] \tilde{\mathbf{a}}_{i\nu}, \rho > \rho'. \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{pmatrix} E_{\rho,i} \\ H_{\rho,i} \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) \exp(i\nu\phi) \cdot \begin{cases} [\mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{M}_{i\nu} + \mathbf{J}_{\nu,\rho}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{I}] \tilde{\mathbf{b}}_{i\nu}, \rho \leq \rho', \\ [\mathbf{H}_{\nu,\rho}^{(1)}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{I} + \mathbf{J}_{\nu,\rho}(k_{\rho,i}\rho) \mathbf{N}_{i\nu}] \tilde{\mathbf{a}}_{i\nu}, \rho > \rho'. \end{cases} \quad (53)$$

式中, $\tilde{\mathbf{a}}_{i\nu}$ 、 $\tilde{\mathbf{b}}_{i\nu}$ 已经考虑到不同类型和方向发射线圈的形状和尺寸,可将式(48)中的 $\mathbf{a}_{0\nu}^h$ 和 $\mathbf{b}_{0\nu}^h$ 换成 $\tilde{\mathbf{a}}_{0\nu}^h$ 和 $\tilde{\mathbf{b}}_{0\nu}^h$,从而确定出列向量 $\tilde{\mathbf{a}}_{0\nu}$ 、 $\tilde{\mathbf{b}}_{0\nu}$,并由式(49)、(50)确定出所有的 $\tilde{\mathbf{a}}_{i\nu}$ 、 $\tilde{\mathbf{b}}_{i\nu}$ 。

2 多分量感应测井仪器的响应

根据经递推得到的 $\mathbf{M}_{i\nu}$ 、 $\mathbf{N}_{i\nu}$ 、 $\tilde{\mathbf{a}}_{i\nu}$ 、 $\tilde{\mathbf{b}}_{i\nu}$,利用式(51)~(53)可计算任意形状和方向的发射线圈在任意第*i*层各向异性介质中产生的电磁场,进而得到接收线圈处的感应电动势。以多分量感应测井仪器为例,计算其不同阵列、不同分量的线圈系在有井眼和侵入带各向异性地层中的响应,计算时考虑仪器金属心轴和绝缘介质保护层的存在。进行模拟时将绝缘保护层作为第0层介质,发射线圈和接收线圈均位于第0层介质之中。将多分量感应测井仪器的*z*向发射和接收线圈视为圆柱面,*x*、*y*方向的发射和接收线圈视为扇面(图1),设发射电流强度为 I_T 、发射线圈匝数为 N_T 、接收线圈匝数为 N_R 。

2.1 *z*向发射线圈的响应

设*z*向发射线圈中心点轴向坐标为 z_T 、线圈半径为 ρ_T ,发射线圈沿轴向均匀排列在宽度为 Δz_T 的圆柱面上。*z*向接收线圈中心点轴向坐标为 z_R 、线圈半径为 ρ_R ,接收线圈沿轴向均匀排列在宽度为 Δz_R 的圆柱面上。扇面形*x*或*y*方向接收线圈中心点坐标为 (ρ_R, ϕ_R, z_R) 、轴向宽度为 Δz_R 、张角为 $\Delta\phi_R$ 。考虑到发射线圈电流源只沿 \mathbf{e}_ϕ 方向,对发射电流源所在的圆柱面形空间进行积分,得

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\nu,\phi}^{j,h} = \frac{N_T I_T \rho_T}{\Delta z_T} \mathbf{a}_{\nu,\phi}^{j,h} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \exp(-ik_z z') \exp(-i\nu\phi') \quad (54)$$

类似方法可得到 $\tilde{\mathbf{b}}_{\nu,\phi}^{j,h}$ 的表达式。式(54)对角度积分后只包含 $\nu = 0$ 阶项。将上述表达式取第0层介质即绝缘保护层电参数后代入式(48)求得 $\tilde{\mathbf{a}}_{0\nu}$ 、 $\tilde{\mathbf{b}}_{0\nu}$,再代入式(52)、(53)可分别得到 $E_{\phi,0}^j$ 、 $H_{\rho,0}^j$ 。

*z*向接收线圈处的感应电动势为

$$V = 2\pi \frac{N_R \rho_R}{\Delta z_R} \int_{z_R - \Delta z_R/2}^{z_R + \Delta z_R/2} E_{\phi,0}^j dz \quad (55)$$

*x*或*y*方向接收线圈处的感应电动势为

$$V = i\omega\mu N_R \rho_R \int_{z_R - \Delta z_R/2}^{z_R + \Delta z_R/2} \int_{\phi_R - \Delta\phi_R/2}^{\phi_R + \Delta\phi_R/2} H_{\rho,0}^j d\phi dz \quad (56)$$

2.2 *x*或*y*向发射线圈的响应

设扇面形*x*或*y*方向发射线圈中心点坐标为 (ρ_T, ϕ_T, z_T) 、轴向宽度为 Δz_T 、张角为 $\Delta\phi_T$,该类型发射线圈产生的电磁场可以看作是许多沿 \mathbf{e}_ρ 方向磁偶极子单元产生的电磁场的叠加。对发射源所在的扇面形空间进行积分,得

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\nu,\rho}^{M,h} = N_T I_T \rho_T \mathbf{a}_{\nu,\rho}^{M,h} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} dz' \int_{\phi_T - \Delta\phi_T/2}^{\phi_T + \Delta\phi_T/2} d\phi' \times \exp(-ik_z z') \exp(-i\nu\phi') \quad (57)$$

类似方法可得到 $\tilde{\mathbf{b}}_{\nu,\rho}^{M,h}$ 的表达式。将上述表达式取第0层介质即绝缘保护层电参数后代入式(48)求得 $\tilde{\mathbf{a}}_{0\nu}$ 、 $\tilde{\mathbf{b}}_{0\nu}$,再代入式(52)、(53)可分别得到 $E_{\phi,0}^M$ 、 $H_{\rho,0}^M$,最后根据式(55)、(56)得到*z*向、*x*或*y*向接收线圈处的感应电动势。

由于发射线圈和接收线圈均在第0层介质中,电磁场包含背景项,式(51)~(53)的无穷限积分收敛速度较慢。为加快其收敛速度,可根据式(32)~(34)在式(51)~(53)的展开形式中扣除掉背景项,从而得到电磁场及接收线圈处感应电动势的散射项,而背景项部分可单独由发射线圈在各向异性均匀介质中产生的电磁场的辐射积分形式得到。

3 数值算例及讨论

模拟含金属心轴和绝缘保护层的多分量感应测井仪器在有井眼和侵入带各向异性地层中的响应。模拟时采用柱状成5层介质模型,第-1层为金属心轴,第0层为绝缘层,第1层为井眼,第2层为侵入带,第3层为均质各向异性地层。假设发射线圈电流 $I_T = 1$ A,金属心轴电导率 $\sigma_{-1} = 2.9 \times 10^7$ S/m,半径 $\rho_{-1} = 0.015$ m,绝缘保护层半径 $\rho_0 = 0.045$ m,井眼半径 $\rho_1 = 0.1$ m。主要模拟共面线圈系产生的*xx*分量和共轴线圈系产生的*zz*分量这两个主分量的感应电

动势,每个分量均包含多个具有不同线圈距的子阵列。

产生 zz 分量的共轴线圈系的发射线圈由两部分组成,匝数 $N_T = 50$, 半径 $\rho_T = 0.03$ m, 轴向宽度 $\Delta z_T = 0.052$ m, 中心点轴向坐标分别为 $z_T = \pm 0.0565$ m。根据线圈距由小到大共模拟四组接收线圈系的响应,每一组接收线圈系均由主接收线圈和屏蔽接收线圈组成, $\rho_R = \rho_T$ 。第一组主接收线圈匝数 $N_R = 12$, 中心点轴向坐标 $z_R = 0.1524$ m, 轴向宽度 $\Delta z_R = 0.01166$ m, 屏蔽接收线圈匝数 $N'_R = -4$, 中心点轴向坐标 $z'_R = 0.1175$ m, 轴向宽度 $\Delta z'_R = 0.00318$ m。第二组主接收线圈匝数 $N_R = 32$, 中心点轴向坐标 $z_R = 0.4572$ m, 轴向宽度 $\Delta z_R = 0.03286$ m, 屏蔽接收线圈匝数 $N'_R = -10$, 中心点轴向坐标 $z'_R = 0.3174$ m, 轴向宽度 $\Delta z'_R = 0.00954$ m。第三组主接收线圈匝数 $N_R = 90$, 中心点轴向坐标 $z_R = 1.143$ m, 轴向宽度 $\Delta z_R = 0.09434$ m, 屏蔽接收线圈匝数 $N'_R = -40$, 中心点轴向坐标 $z'_R = 0.8737$ m, 轴向宽度 $\Delta z'_R = 0.04134$ m。第四组主接收线圈匝数 $N_R = 200$, 中心点轴向坐标 $z_R = 2.3622$ m, 轴向宽度 $\Delta z_R = 0.2109$ m, 屏蔽接收线圈匝数 $N'_R = -88$, 中心点轴向坐标 $z'_R = 1.7960$ m, 轴向宽度 $\Delta z'_R = 0.0922$ m。该分量发射频率取为 20 kHz。

产生 xx 分量的共面线圈系的发射线圈由方位角分别在 $\phi_T = 0^\circ$ 和 $\phi_T = 180^\circ$ 处完全相同的两个线圈组成,匝数 $N_T = 39$, 中心点轴向坐标 $z_T = 0.0$ m, 中心点径向坐标 $\rho_T = 0.03$ m, 高度 $\Delta z_T = 0.036$ m, 张角 $\Delta\phi_T = \pi/3$ 。根据线圈距由小到大共模拟两组接收线圈系的响应,每一组接收线圈系均由方位角分别在 $\phi_R = 0^\circ$ 和 $\phi_R = 180^\circ$ 的两对完全相同的主接收/屏蔽接收线圈组成。所有接收线圈中心点径向坐标 $\rho_R = \rho_T$, 高度 $\Delta z_R = \Delta z_T$, 张角 $\Delta\phi_R = \Delta\phi_T$ 。第一组主接收线圈匝数 $N_R = 44$, 中心点轴向坐标 $z_R = 0.762$ m, 屏蔽接收线圈匝数 $N'_R = -16$, 中心点轴向坐标 $z'_R = 0.5453$ m。第二组主接收线圈匝数 $N_R = 44$, 中心点轴向坐标 $z_R = 1.6$ m, 屏蔽接收线圈匝数 $N'_R = -22$, 中心点轴向坐标 $z'_R = 1.27$ m。该分量发射频率取为 28 kHz。

3.1 多分量感应测井响应与钻井液电导率的关系

忽略侵入带的存在,均质各向异性地层的水平电导率为 $\sigma_{\text{h}} = 0.2$ S/m, 垂直电导率分别取 $\sigma_{\text{v}} = 0.02$ S/m 和 $\sigma_{\text{v}} = 0.05$ S/m 两种数值。井眼内钻井液电导率 σ_{m} 从 0.001 S/m 连续增加到 20 S/m。图 2 给出了 4 组 zz 分量线圈系、两组 xx 分量线圈系的

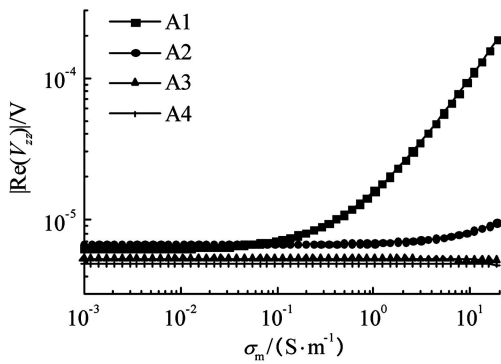
响应随钻井液电导率 σ_{m} 的变化关系,由于 zz 分量的响应与地层垂直电导率 σ_{v} 的取值无关,两种情况下的结果完全相同,故图 2(a)、图 2(b) 只给出了一种情况下的结果。对于 zz 分量,亦用文献[13]的方法进行了模拟,计算结果完全一样,说明了本文推导结果的正确性。

由图 2(a)、(b) 可见,当 σ_{m} 较小时,4 组 zz 分量线圈系实、虚部感应电动势的绝对值均随 σ_{m} 的增大而变化缓慢,受地层电导率的影响相对较大,受 σ_{m} 的影响相对较小。随着 σ_{m} 的继续增加,线圈距最短的第一组线圈系由于受井眼影响最大,其响应增加明显,而线圈距越长的线圈系由于受井眼影响越小,其响应改变越不明显。由图 2(c) 和图 2(d) 可见, xx 分量线圈系的实、虚部响应随 σ_{m} 的变化较 zz 分量线圈系复杂。当 σ_{m} 处于数值较小的范围时, xx 分量线圈系的感应电动势受各向异性地层电导率的影响相对较大,受 σ_{m} 的影响相对较小,故随 σ_{m} 变化的速度较缓慢。当然, σ_{m} 的具体范围因不同的线圈系、同一线圈系的实部或虚部响应、不同的地层电导率而不同。随着 σ_{m} 的继续增加, xx 分量线圈系的实、虚部响应出现快速变化,甚至出现符号的改变。由于随着 σ_{m} 的增加,井眼的影响逐渐增大,各向异性地层电导率的影响逐渐变弱,同一线圈系在不同电导率各向异性地层中的响应趋于一致。对比图 2(c) 和图 2(d) 可以发现,实部响应较虚部响应更快地趋于一致。

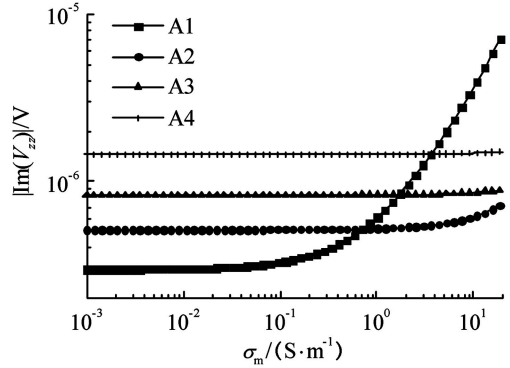
3.2 多分量感应测井响应与地层电导率的关系

仍忽略侵入带的存在,取井眼内钻井液电导率 $\sigma_{\text{m}} = 1$ S/m, 保持均质各向异性地层水平电导率与垂直电导率的比值 $\sigma_{\text{h}}/\sigma_{\text{v}} = 5$ 不变,水平电导率 σ_{h} 从 0.001 S/m 连续增加到 20 S/m。图 3 给出了 4 组 zz 分量线圈系、两组 xx 分量线圈系的响应随地层水平电导率 σ_{h} 的变化关系。为了进行对比,图 3(c)、图 3(d) 同时给出了两组 xx 分量线圈系在均质各向同性地层中的响应。由于 zz 分量的响应与地层垂直电导率 σ_{v} 的取值无关,两种情况下的结果完全相同,故图 3(a)、图 3(b) 只给出了一种情况下的结果。

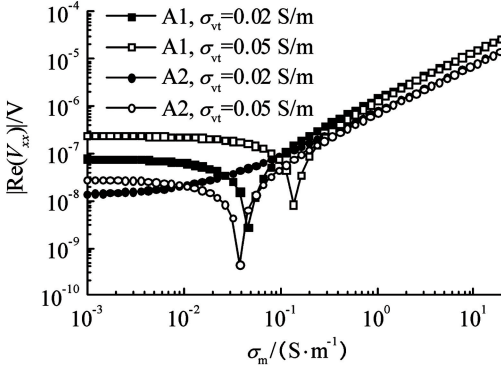
由图 3(a) 和图 3(b), zz 分量线圈系的线圈距越短,其实、虚部响应受井眼影响越大,在地层电导率较小时随 σ_{h} 变化得越缓慢。其后随着 σ_{h} 的继续增加,所有线圈系的响应均增加。由图 3(c) 和图 3(d), 无论是在各向同性地层还是在各向异性地层中, xx 分量线圈系的实、虚部响应均随 σ_{h} 呈现复杂的变化关系。当 σ_{h} 较小时, xx 分量线圈系的感应电



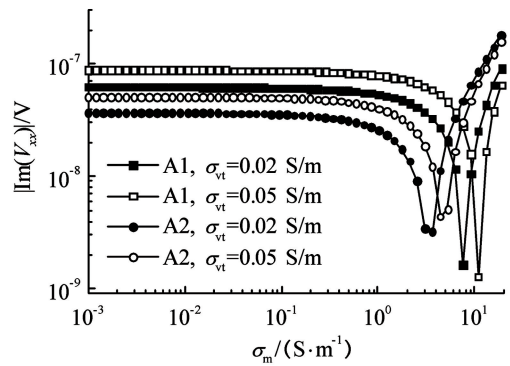
(a) 4组zz分量线圈系实部感应电动势的绝对值



(b) 4组zz分量线圈系虚部感应电动势的绝对值



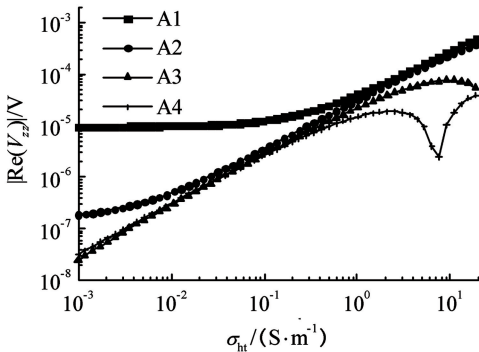
(c) 两组xx分量线圈系实部感应电动势的绝对值



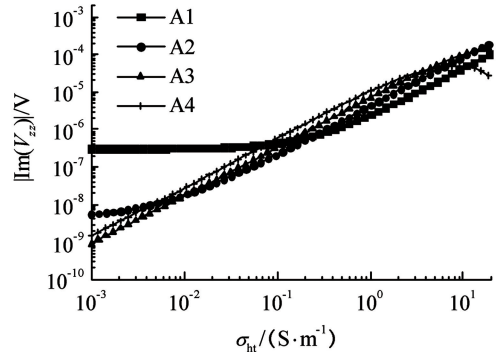
(d) 两组xx分量线圈系虚部感应电动势的绝对值

图2 钻井液电导率连续变化时的响应

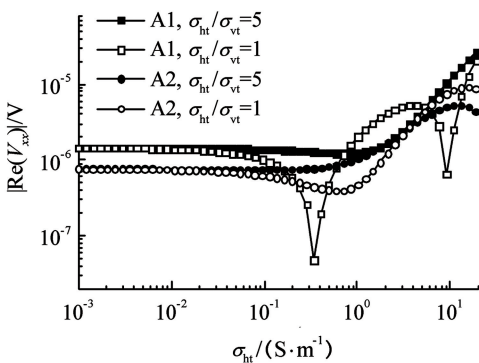
Fig. 2 Responses with drilling liquid conductivity continuously varying



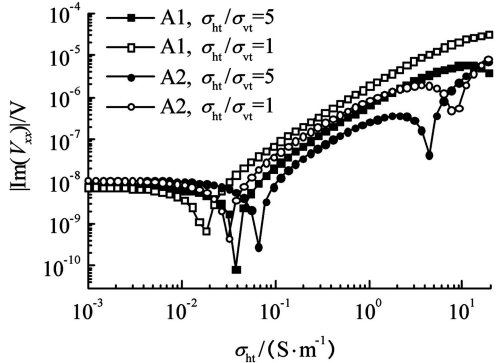
(a) 4组zz分量线圈系实部感应电动势的绝对值



(b) 4组zz分量线圈系虚部感应电动势的绝对值



(c) 两组xx分量线圈系实部感应电动势的绝对值



(d) 两组xx分量线圈系虚部感应电动势的绝对值

图3 地层电导率连续变化时的响应

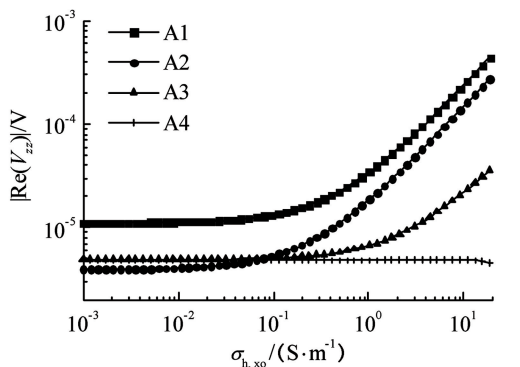
Fig. 3 Responses with formation conductivity continuously varying

动势受井眼电导率的影响相对较大,随 σ_{ht} 变化得较缓慢,且同一组线圈系在各向同性地层和各向异性地层中的响应相同。随着 σ_{ht} 的继续增加,地层电导率的影响逐渐增大,同一组线圈系在各向同性地层和各向异性地层中的响应出现明显差异。由图 3(c),随着 σ_{ht} 的增加,第一组短线圈距线圈系实部响应(为正值)出现先减小后增加的现象,甚至在均质各向同性地层中减小到负值,而第二组长线圈距线圈系实部响应(为正值)出现先减小后增加再减小的复杂变化。由图 3(d),随着 σ_{ht} 的增加,两组线圈系虚部响应出现从正值减小到负值后沿反方向增加再减小的复杂现象。尽管 xx 分量线圈系的实、虚部响应随 σ_{ht} 的变化关系复杂,但同一组线圈系在各向同性地层和各向异性地层中响应的变化规律一

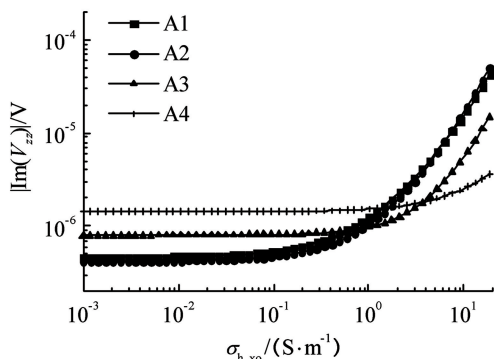
致。 xx 分量线圈系的响应与 σ_{ht} 之间的这种复杂关系为该分量的数据解释带来困难,因为同一响应可对应不同的地层电导率。

3.3 多分量感应测井响应与侵入带电导率的关系

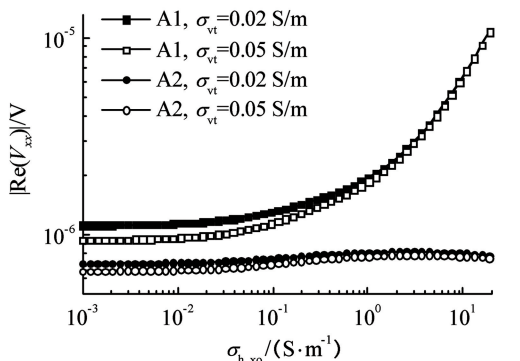
假设侵入带半径 $\rho_2=0.5\text{ m}$,取井眼内钻井液电导率 $\sigma_m=1\text{ S/m}$,均质各向异性地层的水平电导率为 $\sigma_{ht}=0.2\text{ S/m}$,垂直电导率分别取 $\sigma_{vt}=0.02\text{ S/m}$ 和 $\sigma_{vt}=0.05\text{ S/m}$ 两种数值。保持侵入带水平电导率与垂直电导率的比值 $\sigma_{h,xo}/\sigma_{v,xo}=5$ 不变,水平电导率 $\sigma_{h,xo}$ 从 0.001 S/m 连续增加到 20 S/m 。图 4 给出了 4 组 zz 分量线圈系、两组 xx 分量线圈系的响应随侵入带水平电导率 $\sigma_{h,xo}$ 的变化关系,由于 zz 分量的响应与地层垂直电导率 σ_{vt} 的取值无关,故图 4(a)、图 4(b) 只给出了一种情况下的结果。



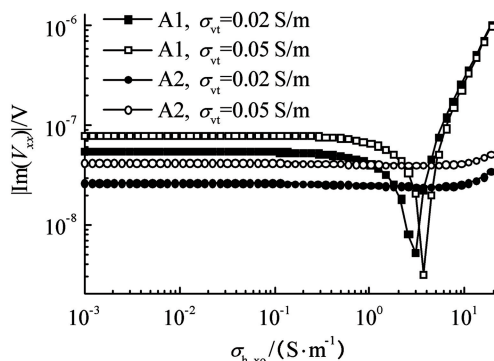
(a) 4 组 zz 分量线圈系实部感应电动势的绝对值



(b) 4 组 zz 分量线圈系虚部感应电动势的绝对值



(c) 两组 xx 分量线圈系实部感应电动势的绝对值



(d) 两组 xx 分量线圈系虚部感应电动势的绝对值

图 4 侵入带电导率连续变化时的响应

Fig. 4 Responses with conductivity of invasion zone continuously varying

由图 4(a) 和图 4(b) 可知,当 $\sigma_{h,xo}$ 较小时,4 组 zz 分量线圈系实、虚部感应电动势的绝对值均变化缓慢,受井眼和地层电导率的影响相对较大,受 $\sigma_{h,xo}$ 的影响相对较小。由图 4(a),随着 $\sigma_{h,xo}$ 的继续增大,前三组线圈距较短的线圈系实部感应电动势的绝对值均增加,而第四组线圈系的实部感应电动势仍无明显变化。而由图 4(b),当 $\sigma_{h,xo}$ 增大到某一数值后,第四组线圈系虚部感应电动势的绝对值亦

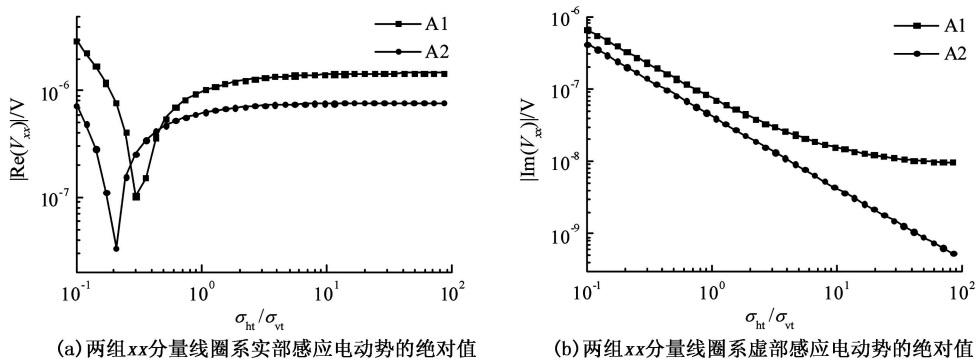
随着 $\sigma_{h,xo}$ 的继续增加而增加。由图 4(c) 和图 4(d),当 $\sigma_{h,xo}$ 处于数值较小的范围时,两组 xx 分量线圈系的感应电动势受井眼和各向异性地层电导率的影响相对较大,受侵入带电导率的影响相对较小,随 $\sigma_{h,xo}$ 变化得较缓慢。由于在 $\sigma_{h,xo}$ 较小时各向异性地层电导率的影响相对较大,地层垂直电导率 σ_{vt} 的不同导致同一组线圈系感应电动势数值也不同。由图 4(c),随着 $\sigma_{h,xo}$ 的继续增大,第一组短线圈距

线圈系的实部响应快速增加,而第二组长线圈距线圈系的响应则在缓慢增加到极大值后缓慢减小。由于随着 $\sigma_{h,x0}$ 的继续增大,侵入带电导率的影响逐渐增加,不同的 σ_{vt} 对应的同一组线圈系的实部感应电动势趋于一致。由图4(d),随着 $\sigma_{h,x0}$ 的继续增大,第一组短线圈距线圈系的虚部感应电动势的绝对值快速减小,并在 $\sigma_{h,x0}$ 增加到某一数值后(该数值针对不同 σ_{vt} 而不同)虚部感应电动势改变符号,并随 $\sigma_{h,x0}$ 增加而快速增加,且由于侵入带电导率的影响逐渐增大,不同的 σ_{vt} 对应的虚部感应电动势趋于一致。第二组长线圈距线圈系的虚部感应电动势没有出现符号改变情况,并且直到 $\sigma_{h,x0}$ 增加到更大数

值后其绝对值才有较明显的增加,并且也直到 $\sigma_{h,x0}$ 增加到更大数值后不同的 σ_{vt} 对应的虚部感应电动势才趋于一致。

3.4 多分量感应测井响应与地层各向异性系数的关系

忽略侵入带的存在,取井眼内钻井液电导率 $\sigma_m = 1 \text{ S/m}$,保持均质各向异性地层水平电导率 $\sigma_{ht} = 0.1 \text{ S/m}$ 不变,水平电导率与垂直电导率的比值 σ_{ht}/σ_{vt} 从0.1连续增加到100。图5给出了两组 xx 分量线圈系实部和虚部感应电动势的绝对值随 σ_{ht}/σ_{vt} 的变化关系,由于 zz 分量感应电动势与地层各向异性系数无关,故未给出。



(a) 两组 xx 分量线圈系实部感应电动势的绝对值

(b) 两组 xx 分量线圈系虚部感应电动势的绝对值

图5 地层各向异性系数连续变化时的响应

Fig. 5 Responses with anisotropic coefficients of formation continuously varying

由图5(a)可知,当 σ_{ht}/σ_{vt} 较小时,随着 σ_{ht}/σ_{vt} 的增加,两组 xx 分量线圈系实部感应电动势的绝对值快速减小(其感应电动势均为负值),当 σ_{ht}/σ_{vt} 增加到某一数值后(该数值针对不同线圈距而不同),实部感应电动势变为正值,并随 σ_{ht}/σ_{vt} 增加而增加,但增加速度越来越缓慢,最终趋于某一稳定值(该稳定值亦针对不同线圈距而不同)。由图5(b),两组 xx 分量线圈系虚部感应电动势的绝对值均随 σ_{ht}/σ_{vt} 的增加而减小(其感应电动势均为负值),随着 σ_{ht}/σ_{vt} 的继续增加,短线圈距线圈系虚部感应电动势的变化逐步趋缓并趋于某一稳定值,而长线圈距线圈系则需要 σ_{ht}/σ_{vt} 增加到更大数值才趋于稳定。

4 结论

(1) 利用由递推方法得到的柱状成层各向异性介质中并矢Green函数的解析式可高效模拟柱状成层各向异性地层中多分量感应测井仪器的响应。

(2) 共面线圈系的响应特性与共轴线圈系的响应特性完全不同。共面线圈系的响应特性更为复杂,对钻井液电导率、侵入带电导率、地层电导率、地

层各向异性的变化更为敏感,且在很多情况下其响应会随这些参数的变化出现符号改变。

(3) 由于共面线圈系的同一响应可对应各向同性地层或各向异性地层的不同电导率,这给测量数据的解释处理带来了困难,须综合利用多种测量信息开发出更为先进的数据处理技术实现对多分量感应测井响应的精确解释。

参考文献:

- [1] MORAN J H, GIANZERO S. Effects of formation anisotropy on resistivity-logging measurements [J]. Geophysics, 1979,44(7):1266-1286.
- [2] KRIEGSHAUSER B, FANINI O, FORGANG S, et al. A new multi-component induction logging tool to resolve anisotropic formations [C/CD]. SPWLA 41th Annual Logging Symposium, 2000, paper D.
- [3] MALLAN R K, TORRES-VERDIN C. Effects of petrophysical, environmental, and geometrical parameters on multi-component induction measurements acquired in high-angle wells [C/CD]. SPWLA 47th Annual Logging Symposium, 2006, paper PPP.
- [4] WANG H N, SO P, YANG S W, et al. Numerical mod-

- eling of multicomponent induction well-logging tools in the cylindrically stratified anisotropic media [J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2008,46(4):1134-1147.
- [5] GIANZERO S. Effect of sonde eccentricity on responses of conventional induction-logging tools [J]. IEEE Trans on Geoscience Electronics, 1978,16(4):332-339.
- [6] LOVELL J R, CHEW W C. Response of a point source in multicylindrically layered medium [J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 1987,25(6):850-858.
- [7] LOVELL J R, CHEW W C. Effect of tool eccentricity on some electrical well-logging tools [J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 1990,28(1):127-136.
- [8] HAGIWARA T, BANNING E J, OSTERMEIER R M, et al. Effects of mandrel, borehole, and invasion for tilt-coil antennas [R]. SPE 84254,2003.
- [9] HUE Y K, TEIXEIRA F L. Analysis of tilted-coil eccentric borehole antennas in cylindrical multilayered formations for well-logging applications [J]. IEEE Trans Antennas Propag, 2006,54(4):1058-1064.
- [10] 魏宝君. 一种新型随钻电阻率测井仪器的响应和刻度[J]. 地球物理学报, 2007,50(2):632-641.
WEI Baojun. Response and calibration of a new logging-while-drilling resistivity tool [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2007,50(2):632-641.
- [11] 汪宏年,陶宏根,姚敬金,等. 用模式匹配算法研究层状各向异性倾斜地层中多分量感应测井响应[J]. 地球物理学报,2008,51(5):1591-1599.
WANG Hongnian, TAO Honggen, YAO Jingjin, et al. Study on the response of a multicomponent induction logging tool in deviated and layered anisotropic formations by using numerical mode matching method[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2008,51(5):1591-1599.
- [12] 魏宝君,王甜甜,王颖. 用磁流源并矢 Green 函数的递推矩阵方法计算层状各向异性地层中多分量感应测井响应[J]. 地球物理学报,2009,52(11):2920-2928.
WEI Baojun, WANG Tiantian, WANG Ying. Computing the response of multi-component induction logging in layered anisotropic formation by the recursive matrix method for magnetic-current-source dyadic Green's function [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2009, 52(11):2920-2928.
- [13] 俞燕明,肖加奇,魏宝君,等. 用并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式评价金属心轴对多分量感应测井响应的影响[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2014,38(4):57-64.
YU Yanming, XIAO Jiaqi, WEI Baojun, et al. Evaluating influence of metal mandrel on response of multi-component induction logging by vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2014,38(4):57-64.
- [14] 魏宝君,王成园,俞燕明,等. 用并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式模拟多分量感应测井仪器的刻度[J]. 中国石油大学学报(自然科学版),2015,39(2):39-47.
WEI Baojun, WANG Chengyuan, YU Yanming, et al. Simulating multi-component induction logging tool's calibration by vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2015,39(2):39-47.
- [15] CHEW W C. Waves and fields in inhomogeneous media [M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [16] 戴振铎,鲁述. 电磁理论中的并矢格林函数[M]. 武汉:武汉大学出版社,1996.

(编辑 修荣荣)