

# 用并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式模拟 多分量感应测井仪器的刻度

魏宝君<sup>1,2</sup>, 王成园<sup>1</sup>, 俞燕明<sup>3</sup>, 常欣莉<sup>1</sup>

(1. 中国石油大学理学院, 山东青岛 266580; 2. 中国石油大学山东省高校新能源物理与材料科学重点实验室, 山东青岛 266580; 3. 中石油长城钻探工程有限公司测井技术研究院, 北京 102206)

**摘要:**基于圆柱坐标系下径向分层介质中并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式, 模拟含金属心轴多分量感应测井的刻度。为提高计算精度, 考虑各分量线圈系的具体形状。将金属心轴作为一层介质处理, 既可以考虑其电导率有限, 也可以考虑其电导率为无穷大的情况。计算结果表明, 无论金属心轴存在与否, 同一组线圈系的刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化规律完全相同, 只是金属心轴的存在导致刻度电动势实部信号和虚部信号的强度均变小。不同分量、不同接收线圈阵列的刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化关系完全不同, 且接收阵列越远, 刻度电动势的最大值越小, 其所对应的刻度环位置越远。

**关键词:**多分量感应测井; 金属心轴; 并矢 Green 函数; 矢量本征函数; 刻度

**中图分类号:**P 631.9      **文献标志码:**A

**引用格式:**魏宝君, 王成园, 俞燕明, 等. 用并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式模拟多分量感应测井仪器的刻度[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2015, 39(2):39-47.

WEI Baojun, WANG Chengyuan, YU Yanming, et al. Simulating multi-component induction logging tool's calibration by vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2015, 39(2):39-47.

## Simulating multi-component induction logging tool's calibration by vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions

WEI Baojun<sup>1,2</sup>, WANG Chengyuan<sup>1</sup>, YU Yanming<sup>3</sup>, CHANG Xinli<sup>1</sup>

(1. College of Science in China University of Petroleum, Qingdao 266580, China;

2. Key Laboratory of New Energy Physics & Material Science in Universities of Shandong, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China;

3. Logging Technique Research Institute of Great Wall Drilling Company in China National Petroleum Corporation, Beijing 102206, China)

**Abstract:** The multi-component induction logging tool's calibration was simulated based on the vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions of radial-layered medium in cylindrical coordinate system, in which the influence of the metal mandrel was considered. The shape of each component's coils was taken into account in order to increase the computational precision. The metal mandrel was taken as a layer of medium and whose conductivity was set both finite and infinite. The results show that the relationship between the calibrated electromotive force of the same coil group and the axial coordinate of the calibration loop's center is exactly the same, no matter whether the metal mandrel exists or not; on the other hand, the intensity of both the real part and imaginary part of the calibrated electromotive force will decrease when the metal

mandrel is considered. The relationship between the calibrated electromotive force and the axial coordinate of the calibration loop's center varies for different components or different receiver arrays. The maximum value of the calibrated electromotive force will become smaller and the corresponding position of the calibration loop's center will become more distant when the receiver array is further far away from the transmitter coil.

**Keywords:** multi-component induction logging; metal mandrel; dyadic Greens functions; vector eigenfunction; calibration

多分量感应测井仪器<sup>[1-3]</sup>对各向异性地层的高精度对比评价具有重要意义,而刻度是仪器研发和下井测量前的重要环节,其决定着线圈系设计的科学性和测量数据的精度。对刻度进行高精度快速模拟可以为仪器的优化设计起到指导作用。由于仪器中心含有高电导率金属心轴,各分量发射线圈在金属心轴上产生的涡流对刻度信号将产生影响,因而在对刻度进行模拟时必须考虑金属心轴的存在并且考虑到各分量线圈系的具体结构,为实际仪器提供准确的刻度值。已有大量文献对多分量感应测井仪器在复杂地层中的响应进行了模拟<sup>[4-7]</sup>,但这些模拟方法一般将各分量线圈系作为磁偶极子处理,并未考虑金属心轴的影响和各分量线圈系的具体结构。俞燕明等<sup>[8]</sup>基于圆柱坐标系下径向成层介质中并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式模拟了考虑金属心轴和线圈系形状时多分量感应测井仪器在均质地层中的响应。笔者在此基础上模拟考虑金属心轴和线圈系形状时多分量感应测井仪器在空气中的刻度,在模拟时将金属心轴作为一层介质处理,既可以考虑其电导率有限,也可以考虑其电导率为无穷大的情况。

## 1 基本理论

### 1.1 径向成层介质中并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式

考虑到仪器心轴的基本形状为圆柱形并且是在空气中对线圈系各分量进行刻度,故采用圆柱坐标系和径向呈 2 层介质模型(图 1)。设发射源随时间的变化关系为  $\exp(-i\omega t)$ ,其中  $\omega$  为角频率,场点位置坐标为  $\mathbf{R}(r, \varphi, z)$ ,源点位置坐标为  $\mathbf{R}'(r', \varphi', z')$ ,设层界面半径为  $r_1$ ,每层介质的磁导率为  $\mu_l$ ,复介电系数为  $\varepsilon_l(l=1,2)$ 。根据  $\mathbf{M}$  类和  $\mathbf{N}$  类矢量本征函数的表达式<sup>[9-12]</sup>并考虑到线圈系和刻度环均在仪器心轴外侧,得出源点位置和场点位置均在第 2 层介质时磁流源磁型和电型并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式<sup>[8]</sup>:

$$\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = {}^{\text{P}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + {}^{\text{S}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'). \quad (1)$$

其中  ${}^{\text{P}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  为背景项<sup>[8]</sup>,  ${}^{\text{S}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  为散射项并由下列表达式得到:

$${}^{\text{S}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta_2^2} \cdot \{ [A'_{o,n} e^{(2)} \mathbf{M}_{o,n}^{e(1)}(\eta_2, h) + B'_{e,n}{}^{o(2)} \mathbf{N}_{e,n}^{o(1)}(\eta_2, h)] \mathbf{M}'_{o,n}{}^{e(1)}(\eta_2, -h) + [C'_{o,n}{}^{e(2)} \mathbf{N}_{o,n}^{e(1)}(\eta_2, h) + D'_{e,n}{}^{o(2)} \mathbf{M}_{e,n}^{o(1)}(\eta_2, h)] \mathbf{N}'_{o,n}{}^{e(1)}(\eta_2, -h) \}. \quad (2)$$

其中

$$\delta_0 = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

$$k_l^2 = \omega^2 \mu_l \varepsilon_l,$$

$$\eta_l = \sqrt{k_l^2 - h^2}, \quad l=1, 2, \quad h \in (-\infty, +\infty).$$

式中,  $n=0, 1, \dots, \infty$  为阶数;上角标 e 表示偶性矢量本征函数;下角标 o 表示奇性矢量本征函数;  $A'_{o,n} e^{(2)}$ 、 $B'_{e,n}{}^{o(2)}$ 、 $C'_{o,n}{}^{e(2)}$ 、 $D'_{e,n}{}^{o(2)}$  为待定系数。

$$\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = {}^{\text{P}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + {}^{\text{S}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}'). \quad (3)$$

其中  ${}^{\text{P}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  为背景项<sup>[8]</sup>,  ${}^{\text{S}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  为散射项并由下列表达式得到:

$${}^{\text{S}}\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = -\frac{ik_2}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_0}{\eta_2^2} \cdot \{ [A'_{o,n} e^{(2)} \mathbf{N}_{o,n}^{e(1)}(\eta_2, h) + B'_{e,n}{}^{o(2)} \mathbf{M}_{e,n}^{o(1)}(\eta_2, h)] \mathbf{M}'_{o,n}{}^{e(1)}(\eta_2, -h) + [C'_{o,n}{}^{e(2)} \mathbf{M}_{o,n}^{e(1)}(\eta_2, h) + D'_{e,n}{}^{o(2)} \mathbf{N}_{e,n}^{o(1)}(\eta_2, h)] \mathbf{N}'_{o,n}{}^{e(1)}(\eta_2, -h) \}. \quad (4)$$

上述待定系数由圆柱界面  $r_1$  处磁流源并矢 Green 函数所满足的边界条件得到。电流源并矢 Green 函数  $\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EJ}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  的矢量本征函数展开式同  $\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ ,  $\mathbf{G}_{(2)}^{\text{HJ}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  的矢量本征函数展开式同  $-\mathbf{G}_{(2)}^{\text{EM}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$ , 只是在确定待定系数时电流源并矢 Green 函数与磁流源并矢 Green 函数所满足的边界条件不同,参见文献[8]。

### 1.2 发射线圈与刻度环之间的互感系数

一般采用倾斜圆环对线圈系的各分量进行刻度(图 2)。发射线圈与刻度环之间存在互感从而在刻度环上产生涡流,该涡流由于刻度环与接收线圈之间存在的互感最终在接收线圈上产生二次感应电动

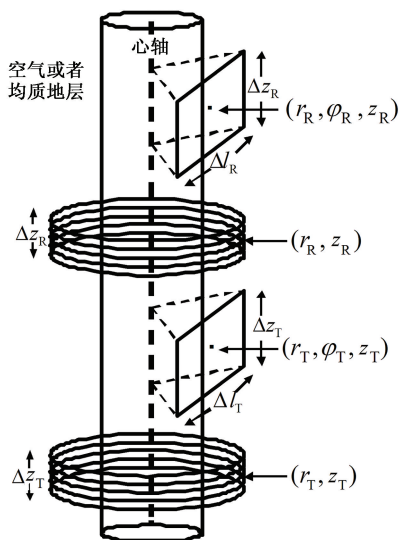


图 1 线圈系模型简图

Fig.1 Schematic configuration of coils

势。在刻度时通过沿仪器轴向平行移动刻度环,从而得到二次感应电动势的最大值及其所对应的刻度环位置,利用该最大值和刻度环上所串接的电阻,计算可得仪器各线圈系所有分量的刻度系数。计算二次感应电动势的核心是计算线圈与刻度环之间的互感系数。

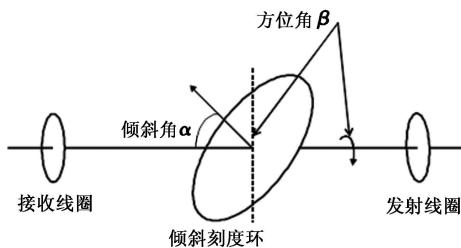


图 2 倾斜刻度环简图

Fig.2 Schematic configuration of tilted calibration loop

设倾斜刻度环的半径为 \$r\_c\$, 倾斜角为 \$\alpha\$, 中心点轴向坐标为 \$z\_c\$, 倾斜刻度环沿仪器轴向投影后半长轴正方向方位角为 \$\beta\$ (半长轴正方向与所选定初始角位置的夹角)。在倾斜刻度环上方位角为 \$\varphi\$ 处取一圆弧 \$dl\$, 其位置为 \$\mathbf{r}\$, 则

$$\mathbf{r} = \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)} \mathbf{e}_r + [z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta)] \mathbf{e}_z \quad (5)$$

而 \$dl = \frac{d\mathbf{r}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi\$, 结合式(5)得

$$d\mathbf{l} = \left[ \frac{-r_c^2 \sin^2 \alpha \cos(\varphi - \beta) \sin(\varphi - \beta)}{\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}} \mathbf{e}_r + \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)} \mathbf{e}_\varphi - r_c \sin \alpha \cos(\varphi - \beta) \mathbf{e}_z \right] d\varphi.$$

由于多分量感应测井仪器的 \$z\$ 向线圈可视为圆柱面, \$x, y\$ 方向的线圈可视为长方形(图 1), 因而在计算发射线圈与刻度环之间的互感系数时分为如下两种情况:

(1) \$z\$ 向发射线圈与刻度环之间的互感系数

设 \$z\$ 向发射线圈半径为 \$r\_T\$, 中心点轴向坐标为 \$z\_T\$, 匝数为 \$N\_T\$, 电流强度为 \$I\_T\$. 发射线圈沿轴向均匀排列在轴向宽度为 \$\Delta z\_T\$ 的圆柱面上, 则发射线圈上的电流密度可表示为

$$\mathbf{J}(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' = \frac{N_T I_T}{\Delta z_T} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} \delta(r' - r_T) \delta(z' - z_0) \times r' dr' d\varphi' dz_0 \mathbf{e}_\varphi. \quad (6)$$

空间中的电磁场强度可表示为

$$\mathbf{E}_{(2)} = i\omega\mu_2 \int_D \mathbf{G}_{(2)}^{EJ}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{R}') d\mathbf{R}', \quad (7)$$

$$\mathbf{H}_{(2)} = \int_D \mathbf{G}_{(2)}^{HJ}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{R}') d\mathbf{R}'. \quad (8)$$

式中, \$D\$ 为电流源所在的区域。将式(6)代入式(7), 得

$$\mathbf{E}_{(2)} = i\omega\mu_2 \frac{N_T I_T r_T}{\Delta z_T} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} \int_0^{2\pi} \mathbf{G}_{(2)}^{EJ}(\mathbf{R}; r_T, \varphi', z') \cdot \mathbf{e}_\varphi d\varphi' dz'. \quad (9)$$

由于 \$z\$ 向发射线圈产生的电场只有 \$\varphi\$ 分量且与 \$\varphi\$ 无关, 其在倾斜刻度环处的感应电动势与刻度环的方位角 \$\beta\$ 无关, 可取 \$\beta = 0^\circ\$. \$z\$ 向发射线圈在倾斜刻度环 \$dl\$ 处产生的感应电动势可表示为

$$dV_{Tc} = \mathbf{E}_{(2)} \cdot d\mathbf{l} = E_{\varphi(2)} (\sqrt{r_c^2 \cos^2 \varphi + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin \varphi; r_T, z_T) \cdot \sqrt{r_c^2 \cos^2 \varphi + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (10)$$

将式(9)代入式(10)得到 \$z\$ 向发射线圈在倾斜刻度环上产生的感应电动势为

$$V_{Tc} = i\omega\mu_2 \frac{N_T I_T r_T r_c}{\Delta z_T} \int_0^{2\pi} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} d\varphi' dz' d\varphi \mathbf{G}_{\varphi\varphi(2)}^{EJ} \times (\sqrt{r_c^2 \cos^2 \varphi + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin \varphi; r_T, \varphi', z') \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

根据并矢 Green 函数的展开特点, 式(11)中对 \$\varphi'\$ 和 \$z'\$ 的积分可解析得到, 对 \$\varphi\$ 需进行数值积分。

根据互感系数的定义, 由式(11)可得到 \$z\$ 向发射线圈与刻度环之间的互感系数为

$$M_{Tc}^{(1)} = \mu_2 \frac{N_T r_T r_c}{\Delta z_T} \int_0^{2\pi} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} d\varphi' dz' d\varphi \mathbf{G}_{\varphi\varphi(2)}^{EJ} \times$$

$$(\sqrt{r_c^2 \cos^2 \varphi + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin \varphi; r_T, \varphi', z')$$

$$\sqrt{\cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi}. \tag{12}$$

利用式(12),结合刻度环所接入的电阻及刻度环自感系数,可得到z向发射线圈在刻度环上产生的涡流。将z向发射线圈参数变成z向接收线圈参数,即可得到z向接收线圈与倾斜刻度环之间的互感系数。

(2)x或y向发射线圈与刻度环之间的互感系数

设发射线圈中心点坐标为 $(r_T, \varphi_T, z_T)$ ,高度为 $\Delta z_T$ ,宽度为 $\Delta l_T$ ,在垂向坐标为 $z'$ ,局部横向位置为 $l'$ 处取一高度为 $dz'$ ,宽度为 $dl'$ 的长方形面元 $ds'$ ,则该面元在圆柱坐标系下的坐标为

$$r'_{ds} = \sqrt{r_T^2 + l'^2},$$

$$\varphi'_{ds} = \varphi_T + \sin^{-1} \frac{l'}{r'_{ds}}.$$

该面元所绕线圈的磁偶极矩可表示为

$$d\mathbf{M}_T = N_T I_T ds' = N_T I_T dl' dz' \left( \mathbf{e}_r \frac{r_p}{r'_{ds}} - \mathbf{e}_\varphi \frac{l'}{r'_{ds}} \right). \tag{13}$$

而空间中的电磁场强度可表示为

$$d\mathbf{E}_{(2)} = -i\omega\mu_2 \mathbf{G}_{(2)}^{EM}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot d\mathbf{M}_T, \tag{14}$$

$$d\mathbf{H}_{(2)} = k_2^2 \mathbf{G}_{(2)}^{HM}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \cdot d\mathbf{M}_T. \tag{15}$$

结合式(13)~(15),得到长方形发射线圈在空间中的产生的电磁场强度为

$$\mathbf{E}_{(2)} = -i\omega\mu_2 N_T I_T \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} \int_{-\Delta l_T/2}^{\Delta l_T/2} \mathbf{G}_{(2)}^{EM}(\mathbf{R}; r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \cdot \left( \mathbf{e}_r \frac{r_T}{r'_{ds}} - \mathbf{e}_\varphi \frac{l'}{r'_{ds}} \right) dl' dz', \tag{16}$$

$$\mathbf{H}_{(2)} = k_2^2 N_T I_T \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} \int_{-\Delta l_T/2}^{\Delta l_T/2} \mathbf{G}_{(2)}^{HM}(\mathbf{R}; r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \cdot \left( \mathbf{e}_r \frac{r_T}{r'_{ds}} - \mathbf{e}_\varphi \frac{l'}{r'_{ds}} \right) dl' dz'. \tag{17}$$

由于长方形发射线圈产生的电场既有r分量,也有φ,z分量且与φ有关,其在倾斜刻度环处的感应电动势与刻度环的倾斜角α和方位角β均有关。长方形发射线圈在倾斜刻度环dl处产生的各部分的感应电动势可表示为

$$dV_{Tc}^{(1)} = \mathbf{E}_{\varphi(2)} \cdot d\mathbf{l} = E_{\varphi(2)} (\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r_T, \varphi_T, z_T) \cdot \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)} d\varphi. \tag{18}$$

将式(18)与式(16)结合得到长方形发射线圈在倾

斜刻度环处产生的第一部分感应电动势为

$$V_{Tc}^{(1)} = -i\omega\mu_2 N_T I_T r_c \int_0^{2\pi} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} \int_{-\Delta l_T/2}^{\Delta l_T/2} dl' dz' d\varphi \cdot \left[ \mathbf{G}_{\varphi r(2)}^{EM}(\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \frac{r_T}{r'_{ds}} - \mathbf{G}_{\varphi \varphi(2)}^{EM}(\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \frac{l'}{r'_{ds}} \right] \times \sqrt{\cos^2(\varphi - \beta) + \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}. \tag{19}$$

$$dV_{Tc}^{(2)} = \mathbf{E}_{r(2)} \cdot d\mathbf{l} =$$

$$E_{r(2)} (\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r_T, \varphi_T, z_T) \cdot \left[ -r_c^2 \sin^2 \alpha \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta) \right] d\varphi. \tag{20}$$

将式(20)与式(16)结合得到长方形发射线圈在倾斜刻度环处产生的第二部分感应电动势为

$$V_{Tc}^{(2)} = i\omega\mu_2 N_T I_T r_c \int_0^{2\pi} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} \int_{-\Delta l_T/2}^{\Delta l_T/2} dl' dz' d\varphi \cdot \left[ \mathbf{G}_{rr(2)}^{EM}(\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \frac{r_T}{r'_{ds}} - \mathbf{G}_{r\varphi(2)}^{EM}(\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \frac{l'}{r'_{ds}} \right] \times \frac{\sin^2 \alpha \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta)}{\sqrt{\cos^2(\varphi - \beta) + \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}}. \tag{21}$$

$$dV_{Tc}^{(3)} = \mathbf{E}_{z(2)} \cdot d\mathbf{l} = E_{z(2)} (\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r_T, \varphi_T, z_T) \cdot [-r_c \sin \alpha \cos(\varphi - \beta)] d\varphi. \tag{22}$$

将式(22)与式(16)结合得到长方形发射线圈在倾斜刻度环处产生的第三部分感应电动势为

$$V_{Tc}^{(3)} = i\omega\mu_2 N_T I_T r_c \int_0^{2\pi} \int_{z_T - \Delta z_T/2}^{z_T + \Delta z_T/2} \int_{-\Delta l_T/2}^{\Delta l_T/2} dl' dz' d\varphi \times \left[ \mathbf{G}_{zr(2)}^{EM}(\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \frac{r_T}{r'_{ds}} - \mathbf{G}_{z\varphi(2)}^{EM}(\sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{ds}, \varphi'_{ds}, z') \frac{l'}{r'_{ds}} \right].$$



$$\sin \alpha \cos (\varphi - \beta). \quad (23)$$

根据互感系数的定义,由式(19)、(20)、(23)可得到长方形发射线圈与倾斜刻度环之间的互感系数为

$$\begin{aligned} M_{\text{Te}}^{(2)} = & -\mu_2 N_{\text{T}} r_c \int_0^{2\pi} \int_{z_{\text{T}} - \Delta z_{\text{T}}/2}^{z_{\text{T}} + \Delta z_{\text{T}}/2} \int_{-\Delta l_{\text{T}}/2}^{\Delta l_{\text{T}}/2} dl' dz' d\phi \cdot \\ & \left\{ \left[ G_{\varphi r(2)}^{\text{EM}} \left( \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \varphi, z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{\text{ds}}, \varphi'_{\text{ds}}, z' \right) \frac{r_{\text{T}}}{r'_{\text{ds}}} - \right. \right. \\ & \left. G_{\varphi \varphi(2)}^{\text{EM}} \left( \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, \right. \right. \\ & \left. \left. z_c - r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{\text{ds}}, \varphi'_{\text{ds}}, z' \right) \frac{l'}{r'_{\text{ds}}} \right] \cdot \\ & \left. \sqrt{\cos^2(\varphi - \beta) + \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)} - \left[ G_{rr(2)}^{\text{EM}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{\text{ds}}, \varphi'_{\text{ds}}, z' \right) \frac{r_{\text{T}}}{r'_{\text{ds}}} - G_{r\varphi(2)}^{\text{EM}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{\text{ds}}, \varphi'_{\text{ds}}, z' \right) \frac{l'}{r'_{\text{ds}}} \right] \cdot \\ & \left. \frac{\sin^2 \alpha \sin(\varphi - \beta) \cos(\varphi - \beta)}{\sqrt{\cos^2(\varphi - \beta) + \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}} - \left[ G_{zr(2)}^{\text{EM}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{\text{ds}}, \varphi'_{\text{ds}}, z' \right) \frac{r_{\text{T}}}{r'_{\text{ds}}} - G_{z\varphi(2)}^{\text{EM}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \sqrt{r_c^2 \cos^2(\varphi - \beta) + r_c^2 \cos^2 \alpha \sin^2(\varphi - \beta)}, \varphi, z_c - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. r_c \sin \alpha \sin(\varphi - \beta); r'_{\text{ds}}, \varphi'_{\text{ds}}, z' \right) \frac{l'}{r'_{\text{ds}}} \right] \cdot \\ & \left. \sin \alpha \cos(\varphi - \beta) \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

根据并矢 Green 函数的展开特点,式(24)中对  $z'$  的积分可解析得到,对其他变量的积分需进行数值积分。利用式(24),结合刻度环所接入的电阻及刻度环自感系数,可得到  $x$  或  $y$  向长方形发射线圈在刻度环上产生的涡流。将发射线圈参数变成接收线圈参数,即可得到  $x$  或  $y$  向接收线圈与刻度环之间的互感系数。

### 1.3 多分量感应测井仪器的刻度

设刻度环所接入的电阻为  $R_c$ ,刻度环自感系数为  $L_c$ ,根据式(12)或式(24)得到的发射线圈与刻度环之间的互感系数  $M_{\text{Te}}$  以及刻度环与接收线圈之间的互感系数  $M_{\text{cR}}$ ,可得到当倾斜刻度环在沿仪器轴

向任意位置时多分量感应测井仪器各线圈系的刻度电动势为

$$V_{\text{TeR}} = -\frac{\omega^2 M_{\text{Te}} M_{\text{cR}} I_{\text{T}}}{R_c - i\omega L_c}.$$

若某分量有多个发射或接收线圈,则  $M_{\text{Te}}$  或  $M_{\text{cR}}$  应是多个线圈互感系数的组合。仪器某一分量线圈系的刻度系数为  $K = \max(V_{\text{TeR}}) \cdot R_c$ ,既包含实部也包含虚部。

## 2 数值算例及讨论

假设发射线圈电流  $I_{\text{T}} = 1$  A,金属心轴电导率  $\sigma_1 = 2.9 \times 10^7$  S/m,心轴半径  $r_1 = 0.0127$  m,刻度环半径  $r_c = 0.55$  m,自感系数  $L_c = 3.46 \times 10^{-6}$  H,刻度环所接入的电阻  $R_c = 1.03 \Omega \cdot \text{m}$ 。对不同分量线圈系的刻度进行模拟。

### 2.1 $zz$ 分量的刻度

该分量的发射线圈和接收线圈均沿  $z$  向。 $z$  向发射线圈由两部分组成,每一部分线圈的匝数  $N_{\text{T}} = 50$ ,半径  $r_{\text{T}} = 0.033$  m,轴向宽度  $\Delta z_{\text{T}} = 0.052$  m,两部分线圈中心点的轴向坐标分别为  $z_{\text{T}} = \pm 0.0565$  m。共模拟三组  $z$  向接收线圈的刻度,每一组  $z$  向接收线圈均由主接收线圈和屏蔽接收线圈两部分组成,  $r_{\text{R}} = r_{\text{T}}$ 。

第一组主接收线圈匝数  $N_{\text{R}} = 32$ ,中心点轴向坐标  $z_{\text{R}} = 0.457$  m,轴向宽度  $\Delta z_{\text{R}} = 0.033$  m,屏蔽接收线圈匝数  $N'_{\text{R}} = -10$ ,中心点轴向坐标  $z'_{\text{R}} = 0.317$  m,轴向宽度  $\Delta z'_{\text{R}} = 0.0095$  m。

第二组主接收线圈匝数  $N_{\text{R}} = 90$ ,中心点轴向坐标  $z_{\text{R}} = 1.143$  m,轴向宽度  $\Delta z_{\text{R}} = 0.09434$  m,屏蔽接收线圈匝数  $N'_{\text{R}} = -40$ ,中心点轴向坐标  $z'_{\text{R}} = 0.8737$  m,轴向宽度  $\Delta z'_{\text{R}} = 0.04134$  m。

第三组主接收线圈匝数  $N_{\text{R}} = 200$ ,中心点轴向坐标  $z_{\text{R}} = 2.362$  m,轴向宽度  $\Delta z_{\text{R}} = 0.211$  m,屏蔽接收线圈匝数  $N'_{\text{R}} = -88$ ,中心点轴向坐标  $z'_{\text{R}} = 1.796$  m,轴向宽度  $\Delta z'_{\text{R}} = 0.0922$  m。模拟刻度时取发射频率为 68 kHz,刻度环倾斜角  $\alpha = 0^\circ$ 。

图3给出了  $zz$  分量刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化关系,同时绘出了幅值、实分量、虚分量。为分析金属心轴电导率对刻度的影响,图3(d)给出了心轴电导率为 0 时第三组接收线圈的刻度电动势。

对比图3(c)和图3(d)的结果可以发现,两种

情况下刻度电动势的变化规律完全相同,只是由于金属心轴的存在使得发射线圈和接收线圈的有效面积变小,从而导致刻度电动势的强度变小。对于其他分量的刻度电动势亦有相同结论。

由图 3(a),第一组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 0.30 m,实、虚分量最大值分别为  $7.8961 \times 10^{-4}$  V、 $1.1566 \times 10^{-3}$  V。由图 3(b),第二组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 1.08 m,实、虚分量最大值分别为  $3.2863 \times 10^{-4}$

V、 $4.8138 \times 10^{-4}$  V。由图 3(c),第三组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 2.32 m,实、虚分量最大值分别为  $1.2559 \times 10^{-4}$  V、 $1.8396 \times 10^{-4}$  V。

对比图 3(a) ~ (c)可以看出,尽管都属于  $zz$  分量,不同接收线圈阵列的刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化关系完全不同,且接收阵列越远,刻度电动势的最大值越小,其所对应的刻度环位置越远。

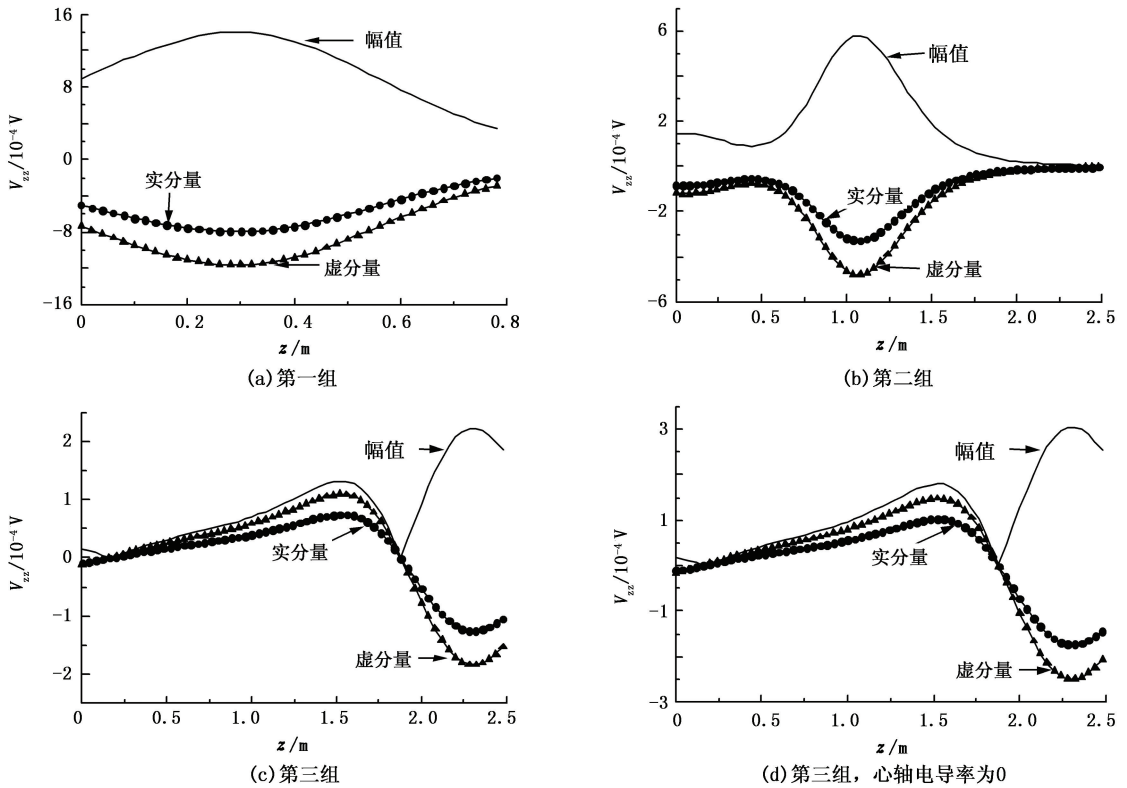


图 3  $zz$  分量刻度电动势与刻度环中心点轴向坐标之间的关系

Fig. 3 Relationship between  $zz$ -component's calibrated electromotive force and axial coordinates of calibration loop's center

### 2.2 $zx$ 分量的刻度

该分量的发射线圈沿  $z$  向,接收线圈垂直于仪器轴线。发射线圈参数和所采用频率同上,刻度环倾斜角  $\alpha = 30^\circ$ ,刻度环沿仪器轴向投影后半长轴方位角  $\beta = 90^\circ$ 。共模拟两组  $x$  向接收线圈的刻度,每组接收线圈均由方位角分别在  $\varphi_R = 0^\circ$  和  $\varphi_R = 180^\circ$  的两对完全相同的主接收/屏蔽接收线圈组成。所有线圈的高度均为  $\Delta z_R = 0.036$  m,宽度均为  $\Delta l_R = 0.04326$  m,中心点径向坐标均为  $r_R = 0.02725$  m。第一组主接收线圈匝数  $N_R = 44$ ,中心点轴向坐标  $z_R = 0.762$  m,屏蔽接收线圈匝数  $N'_R = -16$ ,中心点轴向坐标  $z'_R = 0.545$  m。第二组接收线圈主接收线圈匝数

$N_R = 44$ ,中心点轴向坐标  $z_R = 1.6$  m,屏蔽接收线圈匝数  $N'_R = -22$ ,中心点轴向坐标  $z'_R = 1.27$  m。

图 4 给出了  $zx$  分量刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化关系。由图 4(a),第一组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 0.68 m,实、虚分量最大值分别为  $2.2259 \times 10^{-4}$  V、 $3.2569 \times 10^{-4}$  V。由图 4(b),第二组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 1.00 m,实虚分量最大值分别为  $3.4808 \times 10^{-5}$  V、 $5.0936 \times 10^{-5}$  V。对于  $zy$  分量的刻度亦可作类似模拟。对比图 4(a)和图 4(b)可得到与  $zz$  分量的刻度类似的结论。

### 2.3 $xz$ 分量的刻度

该分量的发射线圈垂直于仪器轴线,接收线圈沿

$z$  向。 $x$  向发射线圈由方位角分别在  $\varphi_T = 0^\circ$  和  $\varphi_T = 180^\circ$  处完全相同的两个线圈组成,匝数  $N_T = 39$ ,中心点轴向坐标  $z_T = 0.0$  m,中心点径向坐标  $r_T = 0.02725$  m,高度  $\Delta z_T = 0.036$  m,宽度  $\Delta l_T = 0.04326$  m。

共模拟三组  $z$  向接收线圈的刻度,参数同上。模拟刻度时取发射频率为 64 kHz,刻度环倾斜角  $\alpha = 30^\circ$ ,刻度环沿仪器轴向投影后半长轴方位角  $\beta = 90^\circ$ 。

图 5 给出了  $xz$  分量刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化关系。由图 5(a),第一组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 0.16 m,

实、虚分量最大值分别为  $1.7333 \times 10^{-4}$  V、 $2.3416 \times 10^{-4}$  V。由图 5(b),第二组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 1.16 m,实、虚分量最大值分别为  $1.6778 \times 10^{-5}$  V、 $2.2666 \times 10^{-5}$  V。由图 5(c),第三组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 2.32 m,实、虚分量最大值分别为  $1.0887 \times 10^{-5}$  V、 $1.4707 \times 10^{-5}$  V。对于  $yz$  分量的刻度亦可作类似模拟。对比图 5(a) ~ (c) 可得到与  $zz$  分量的刻度类似的结论。

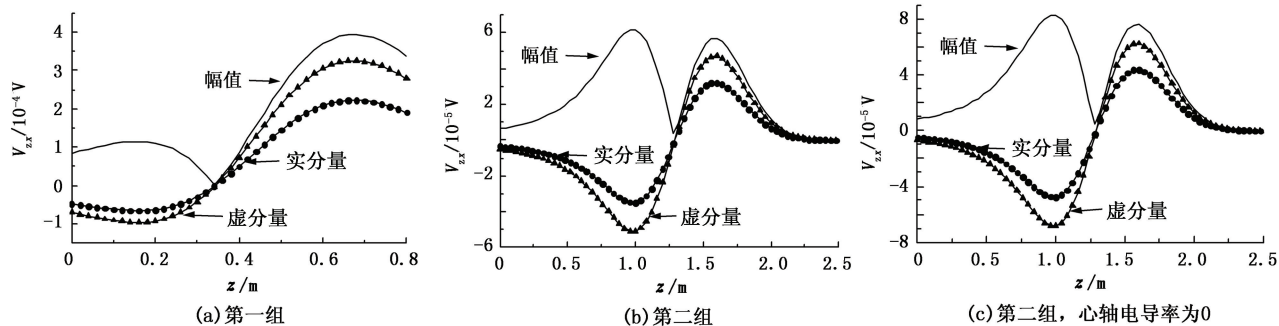


图 4  $zx$  分量刻度电动势与刻度环中心点轴向坐标之间的关系

Fig. 4 Relationship between  $zx$ -component's calibrated electromotive force and axial coordinates of calibration loop's center

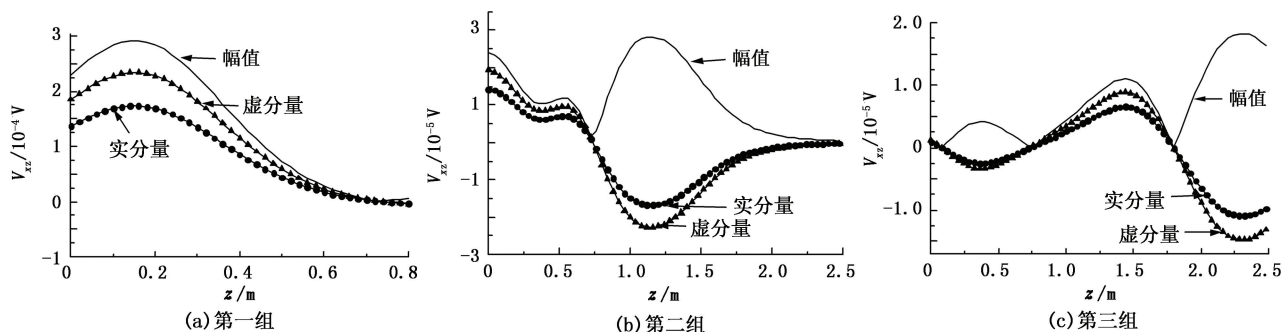


图 5  $xz$  分量刻度电动势与刻度环中心点轴向坐标之间的关系

Fig. 5 Relationship between  $xz$ -component's calibrated electromotive force and axial coordinates of calibration loop's center

## 2.4 $xx$ 分量的刻度

该分量的发射线圈和接收线圈均垂直于仪器轴线。 $x$  向发射线圈和两组  $x$  向接收线圈参数同上。模拟刻度时取发射频率为 92 kHz,刻度环倾斜角  $\alpha = 30^\circ$ ,刻度环沿仪器轴向投影后半长轴方位角  $\beta = 90^\circ$ 。

图 6 给出了  $xx$  分量刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化关系。由图 6(a),第一组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 0.12 m,实、虚分量最大值分别为  $1.4144 \times 10^{-5}$  V、 $2.7908 \times$

$10^{-5}$  V。由图 6(b),第二组线圈刻度电动势的最大值所对应的刻度环位置为 1.6 m,实、虚分量最大值分别为  $2.7295 \times 10^{-6}$  V、 $5.3846 \times 10^{-6}$  V。对于  $xy$ 、 $yx$ 、 $yy$  分量的刻度亦可作类似模拟。对比图 6(a) 和图 6(b) 可得到与  $zz$  分量的刻度类似的结论。

对于上述各分量的刻度也用商用有限元软件进行了模拟。计算发现,在不考虑金属心轴电导率的情况下两种方法的计算结果完全一致,验证了本文中基于并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式模拟方法的准确性。在考虑金属心轴的情况下,由于本

文中解析算法将金属心轴作为一层介质处理,计算结果更加准确。无论考虑金属心轴与否,本文中算法计算速度相当,均远快于商用有限元软件,尤其是

在考虑金属心轴的情况下比商用有限元软件的计算速度更快。

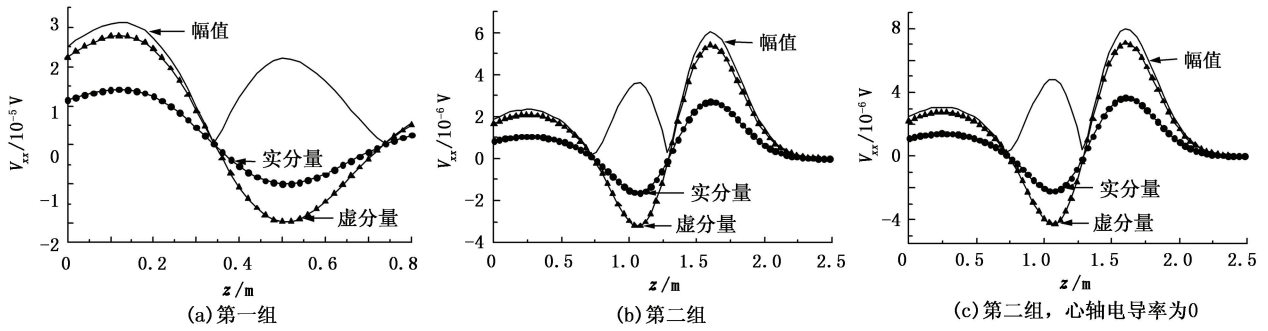


图6  $xx$ 分量刻度电动势与刻度环中心点轴向坐标之间的关系

Fig.6 Relationship between  $xx$ -component's calibrated electromotive force and axial coordinates of calibration loop's center

### 3 结论

(1) 采用基于圆柱坐标系下径向成层介质并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式可有效模拟含金属心轴多分量感应测井仪器的刻度。由于该算法属于解析方法并将金属心轴作为一层介质处理,故具有速度快、精度高的优点。

(2) 无论金属心轴存在与否,同一组线圈系的刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化规律完全相同,只是当金属心轴存在时刻度电动势实部信号和虚部信号的强度均变小。

(3) 不同分量、不同接收线圈阵列的刻度电动势随刻度环中心点轴向坐标的变化关系完全不同,且接收阵列越远,刻度电动势的最大值越小,其所对应的刻度环位置越远。

### 参考文献:

[1] KRIEGSHAUSER B, FANINI O, FORGANG S, et al. A new multi-component induction logging tool to resolve anisotropic formations [C/CD]. SPWLA 41th Annual Logging Symposium, 2000, paper D.

[2] ZHANG Z, YU L, KRIEGSHAUSER B, et al. Simultaneous determination of relative angles and anisotropic resistivity using multicomponent induction logging data [C/CD]. SPWLA 42th Annual Logging Symposium, 2001, paper Q.

[3] MALLAN R K, TORRES-VERDIN C. Effects of petrophysical, environmental, and geometrical parameters on multi-component induction measurements acquired in

high-angle wells [C/CD]. SPWLA 47th Annual Logging Symposium, 2006, paper PPP.

[4] 王昌学,杨韦,储昭坦,等. 多分量感应测井响应的交错网格有限差分法模拟[J]. 石油大学学报:自然科学版,2005,29(3):35-40.  
WANG Changxue, YANG Wei, CHU Zhaotan, et al. Modeling of multicomponent induction logging response by staggered grid finite difference method [J]. Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Natural Science), 2005,29(3):35-40.

[5] 汪宏年,陶宏根,姚敬金,等. 用模式匹配算法研究层状各向异性倾斜地层中多分量感应测井响应[J]. 地球物理学报,2008,51(5):1591-1599.  
WANG Hongnian, TAO Honggen, YAO Jingjin, et al. Study on the response of a multicomponent induction logging tool in deviated and layered anisotropic formations by using numerical mode matching method [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2008,51(5):1591-1599.

[6] 魏宝君,王甜甜,王颖. 用磁流源并矢 Green 函数的递推矩阵方法计算层状各向异性地层中多分量感应测井响应[J]. 地球物理学报,2009,52(11):2920-2928.  
WEI Baojun, WANG Tiantian, WANG Ying. Computing the response of multi-component induction logging in layered anisotropic formation by the recursive matrix method for magnetic-current-source dyadic Green's function [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2009, 52 (11): 2920-2928.

[7] 张国艳,肖加奇,肖占山,等. 三维感应测井仪器在三维井眼环境中的正演模拟[J]. 中国石油大学学报:自然科学版,2013,37(3):63-67.

- ZHANG Guoyan, XIAO Jiaqi, XIAO Zhanshan, et al. Forward modeling of 3D induction logging tool in 3D borehole environment[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2013,37(3):63-67.
- [8] 俞燕明,肖加奇,魏宝君,等. 用并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式评价偏心对随钻电阻率测井响应的影晌[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2014,38(4):57-64.
- YU Yanming, XIAO Jiaqi, WEI Baojun, et al. Evaluating influence of metal mandrel on response of multi-component induction logging by vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2014,38(4):57-64.
- [9] 戴振铎,鲁述. 电磁理论中的并矢格林函数[M]. 武汉:武汉大学出版社,1996.
- [10] 魏宝君. 一种新型随钻电阻率测井仪器的响应和刻度[J]. 地球物理学报, 2007,50(2):632-641.
- WEI Baojun. Response and calibration of a new logging-while-drilling resistivity tool[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2007,50(2):632-641.
- [11] 魏宝君,田坤,张旭,等. 用并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式评价偏心对随钻电磁波电阻率测井响应的影晌[J]. 中国石油大学学报:自然科学版, 2010,34(5):57-62.
- WEI Baojun, TIAN Kun, ZHANG Xu, et al. Evaluating influence of eccentricity on response of electromagnetic wave resistivity logging-while-drilling by vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions[J]. Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science), 2010,34(5):57-62.
- [12] 魏宝君,王莎莎,欧永峰. 用并矢 Green 函数的矢量本征函数展开式模拟随钻感应测井仪器的响应[J]. 地球物理学报, 2011,54(5):1391-1401.
- WEI Baojun, WANG Shasha, OU Yongfeng. Simulating the response of induction logging-while-drilling tools by vector eigenfunction expansion formulae for dyadic Green's functions[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2011, 54(5):1391-1401.

(编辑 修荣荣)